PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 3 — 1. Februar 1934 — Redaktionsschluß für Nr. 5 am 14. Februar 1934. — 35. Jahrgang

INHALT:

Abhandlungen:

J. Otto, A. Michels und H. Wouters, Über Isothermen des Stickstoffes zwischen 0° und 150° bei Drucken bis zu 400 Atmosphären. S. 97.

P. Debye, Hochfrequenzverluste und Molekülstruktur. S. 101.

R. W. Pohl, Zur Elektronenleitung in Kristallen. Mit Tafel I. S. 107.

W. Ramm, Die Feinstruktur der Rayleighstrahlung. (Vorläufige Mitteilung.) Mit Tafel II. S. 111.

F. Heineck, Über die Sperrschicht am Bleisulfid. S. 113.

Berichte:

Th. Sexl, Bericht über Fragen der Kernphysik. I. S. 119.

Zuschriften:

K. R. Dixit, Elektronenreflexion an Gläsern. S. 141.

Besprechungen:

R. Dahlgreen, Tonfilmwiedergabe. S. 142.

H. Dohse und H. Mark, Die Adsorption von Gasen und Dämpfen an festen Körpern. S. 142.

Walther und Werner Gerlach, Die Chemische Emissions-Spektralanalyse. II. Teil. S. 142.

A. Kintchine, Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. S. 143.

J. Lense, Reihenentwicklung in der mathematischen Physik. S. 143.

M. Lindow, Gewöhnliche Differentialgleichungen. (Bd. 4 der mathematisch-physikalischen Bibliothek. II. Reihe.) S. 143.

E. Marx, Handbuch der Radiologie. Band VI. I. Teil. S. 143.

P. Neményi, Wasserbauliche Strömungslehre. S. 144.

L. Prandtl und A. Betz, Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. S. 144.

R. Rothe, Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure. S. 144.

Nachrichten. S. 144.

ABHANDLUNGEN.

Über Isothermen des Stickstoffes zwischen 0° und 150° bei Drucken bis zu 400 Atmosphären[1]).

Von J. Otto, A. Michels und H. Wouters.

Die bisher ausgeführten Meßreihen zur Bestimmung von Stickstoffisothermen[2]) hatten nicht die wünschenswerte Übereinstimmung gebracht. Deshalb war es zu begrüßen, daß einem von uns Gelegenheit gegeben war, einer Einladung nach Amsterdam Folge zu leisten, um sich an der Messung von Stickstoffisothermen zu beteiligen mit einer Versuchsanordnung, die von der in der Reichsanstalt verwendeten prinzipiell abweicht.

Die früheren Versuche der Reichsanstalt waren mit einer Anordnung ausgeführt worden, bei der das Hochdruckvolumen im Verlauf einer Versuchsreihe das gleiche blieb, während die Normaldruckvolumina (d. h. die Gasvolumina bei 760 mm *Hg* und 0°) mit steigendem Hochdruck entsprechend zunahmen.

Bei der Amsterdamer Anordnung, die schon früher ausführlich beschrieben worden ist[1]), wird das Gas, dessen Normalvolumen vor einer Versuchsreihe bestimmt wird, in einem Piezometer auf bestimmte durch *Pt*-Kontakte definierte Hochdruckvolumina zusammengepreßt, so daß die Hochdruckvolumina mit steigendem Druck allmählich kleiner werden.

Bei normalem Druck hatte das Gas bei den vorliegenden Versuchsreihen ein Volumen von etwa 98 cm^3. Die Hochdruckvolumina lagen zwischen 2 cm^3 und 0,43 cm^3.

Der bei den Messungen verwendete Stickstoff war durch Erhitzen von Natriumazid in der Reichsanstalt[2]) hergestellt und durch wiederholte fraktionierte Kondensation und Destillation gereinigt worden.

Die Temperaturen des Ölbades, die mittels Quecksilber-Kontaktthermometer auf $^1/_{100}$ Grad konstant gehalten werden konnten, wurden durch Quecksilberthermometer festgestellt, die in $^1/_{100}$ Grade geteilt und in der Reichsanstalt geeicht

1) Diese Arbeit ist zugleich eine Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt Charlottenburg und dem Natuurkundig Laboratorium der Gemeente-Universiteit Amsterdam.

2) Kamerlingh Onnes u. van Urk, Comm. Leiden, Nr. 169d, 1924; Smith u. Taylor, Journ. Amer. Chem. Soc. **45**, 2107, 1923; **48**, 3122, 1926; Verschoyle, Proc. Roy. Soc. London **111**, 566, 1926; Bartlett, Cupples u. Tremearne, Journ. Amer. Chem. Soc. **50**, 1275, 1928; Amagat, Ann. Chim. Phys. (6) **29**, 68, 1893; Holborn u. Otto, Zeitschr. f. Phys. **23**, 77, 1924; **30**, 320, 1924; siehe auch Otto, Handb. d. Exp.-Phys. **8** (2), 167, 1929.

1) Michels u. Gibson, Ann. d. Phys. (4) **87**, 850, 1928.

2) Justi, Ann. d. Phys. (5) **10**, 983, 1931. Herr Dr. Justi hat uns bereitwillig mit seinen Erfahrungen bei der Herstellung des Gases unterstützt, wofür wir ihm an dieser Stelle unseren Dank aussprechen.

worden waren. Die Messung der Drucke erfolgte mit Hilfe von Druckwaagen, deren wirksamer Querschnitt durch eine 40 m hohe Quecksilbersäule geeicht worden war.

In Tabelle I sind die Meßergebnisse zusammengestellt. Spalte 1 gibt die Druckstufe an, Spalte 2 den Druck in Atmosphären (1 Atm. = 760 mm Hg), Spalte 3 den zugehörigen pv-Wert, wobei pv beim Druck 1 Atm. und 0° gleich 1 gesetzt worden ist, und Spalte 4 die entsprechende Dichte des Gases.

Die hier benutzte Methode ist dadurch charakterisiert, daß sie entsprechend den definierten

Tabelle I.

	p (Atm.)	pv	d
		0°	
1	45,6379	0,98567	46,301
2	69,1037	0,98310	70,291
3	90,6131	0,98398	92,089
4	112,1496	0,98823	113,485
5	135,5348	0,99645	136,017
6	158,0121	1,00760	156,821
7	179,1304	1,02083	175,476
8	202,1320	1,03783	194,765
9	227,5901	1,05973	214,763
		25,336°	
1	50,3966	1,08907	46,275
2	76,7270	1,09217	70,252
3	101,1116	1,09859	92,038
4	125,7205	1,10843	113,422
5	152,6223	1,12269	135,943
6	178,6438	1,13977	156,737
7	203,1933	1,15857	175,383
8	230,0359	1,18169	194,666
9	259,8100	1,21032	214,661
		49,740°	
1	54,9618	1,18841	46,248
2	84,0419	1,19697	70,212
3	111,1629	1,20847	91,986
4	138,7115	1,22363	113,361
5	168,9964	1,24381	135,870
6	198,4198	1,26661	156,654
7	226,2711	1,29083	175,291
8	256,7706	1,31972	194,564
9	290,6698	1,35481	214,546
		75,276°	
1	59,7336	1,29235	46,221
2	91,6619	1,30628	70,170
3	121,6517	1,32327	91,933
4	152,2280	1,34364	113,295
5	186,0084	1,36980	135,792
6	218,9478	1,39844	156,566
7	250,1857	1,42806	175,193
8	284,4762	1,46292	194,458
9	322,6444	1,50465	214,431
		99,679°	
1	64,2525	1,39099	46,192
2	98,8986	1,41027	70,127
3	131,5635	1,43195	91,877
4	165,0525	1,45773	113,226
5	202,1479	1,48953	135,713
6	238,4262	1,52373	156,475
7	272,9100	1,55867	175,091
8	310,8145	1,59930	194,345
9	353,0000	1,64713	214,312

Tabelle I (Fortsetzung).

	p (Atm.)	pv	d
		124,335°	
1	68,8241	1,49093	46,162
2	106,2097	1,51551	70,082
3	141,5815	1,54198	91,818
4	177,9644	1,57274	113,155
5	218,3845	1,61017	135,628
6	258,0127	1,64994	156,377
7	295,7737	1,69029	174,984
8	337,2128	1,73617	194,228
9	383,4045	1,79004	214,188
		149,966°	
1	73,5668	1,59477	46,130
2	113,7762	1,62458	70,034
3	151,9747	1,65628	91,757
4	191,3677	1,69234	113,079
5	235,2407	1,73563	135,536
6	278,2998	1,78084	156,274
7	319,3912	1,82644	174,871
8	364,5520	1,87814	194,103
9	414,9315	1,93848	214,050

Hochdruckvolumina pv-Serien liefert für Dichten, die bei den verschiedenen Temperaturen nahezu die gleichen sind. Der in der Tabelle I erkenntliche geringe Gang der Dichteabnahme bei Temperaturerhöhung wird teils durch die thermische Ausdehnung, teils durch die Kompressibilität des Piezometers verursacht.

Für die Berechnung von pv-Werten bei Temperaturen, die zwischen den Versuchstemperaturen liegen, ist es vorteilhaft, über Werte verfügen zu können, die sich auf völlig gleiche Dichten beziehen. Diese Umrechnung läßt sich leicht ausführen. Die Ergebnisse gleichzeitig für abgerundete Temperaturen sind in Tabelle II enthalten.

Tabelle II.

	d	p (Atm.)	pv	$\Delta_d 10^5$	$\Delta_p 10^5$
			0°		
1	46,220	45,558	0,98568	−1	0
2	70,180	68,994	0,98310	0	−1
3	91,940	90,465	0,98396	−4	−4
4	113,300	111,961	0,98818	+1	+5
5	135,800	135,304	0,99635	+5	+4
6	156,560	157,725	1,00744	0	−4
7	175,200	178,811	1,02061	+2	−4
8	194,470	201,770	1,03754	−7	+5
9	214,454	227,178	1,05935	+3	−2
			25°		
1	46,220	50,273	1,08770	+7	+7
2	70,180	76,547	1,09072	−4	−6
3	91,940	100,861	1,09703	−5	−4
4	113,300	125,397	1,10677	+3	+6
5	135,800	152,221	1,12092	+3	+4
6	156,560	178,143	1,13786	0	−3
7	175,200	202,628	1,15655	+2	−2
8	194,470	229,381	1,17952	−4	+3
9	214,450	259,051	1,20798	+2	−1

Tabelle II (Fortsetzung).

	d	p (Atm.)	pv	$\Delta_d 10^5$	$\Delta_p 10^5$
			50°		
1	46,220	54,977	1,18946	+ 10	0
2	70,180	84,081	1,19807	— 2	— 4
3	91,940	111,212	1,20961	— 11	— 4
4	113,300	138,770	1,22480	— 1	+ 8
5	135,800	169,075	1,24503	+ 4	+ 5
6	156,560	198,495	1,26785	+ 3	— 7
7	175,200	226,376	1,29210	+ 5	— 4
8	194,470	256,903	1,32104	— 10	+ 4
9	214,450	290,831	1,35617	+ 3	— 1
			75°		
1	46,220	59,681	1,29123	+ 21	+ 10
2	70,180	91,593	1,30511	— 15	— 15
3	91,940	121,548	1,32204	— 1	+ 4
4	113,300	152,089	1,34236	— 8	+ 1
5	135,800	185,836	1,36845	+ 2	+ 3
6	156,560	218,716	1,39701	— 9	— 2
7	175,200	249,939	1,42659	+ 6	— 1
8	194,470	284,197	1,46139	— 13	+ 2
9	214,450	322,333	1,50307	+ 3	— 1
			100°		
1	46,220	64,353	1,39231	+ 19	+ 7
2	70,180	99,072	1,41169	— 3	— 3
3	91,940	131,791	1,43345	— 20	— 10
4	113,300	165,341	1,45932	0	+ 8
5	135,800	202,508	1,49123	+ 3	+ 3
6	156,560	238,837	1,52553	+ 7	— 3
7	175,200	273,415	1,56059	+ 5	— 2
8	194,470	311,418	1,60137	— 11	+ 2
9	214,450	353,703	1,64935	+ 2	— 1

Tabelle II (Fortsetzung).

	d	p (Atm.)	pv	$\Delta_d 10^5$	$\Delta_p 10^5$
			125°		
1	46,220	69,037	1,49367	+ 16	— 4
2	70,180	106,565	1,51845	+ 6	+ 5
3	91,940	142,057	1,54511	— 19	— 7
4	113,300	178,568	1,57606	— 6	+ 8
5	135,800	219,145	1,61373	— 2	— 2
6	156,560	258,905	1,65371	+ 6	— 8
7	175,200	296,845	1,69432	+ 24	+ 9
8	194,470	338,471	1,74048	— 26	— 3
9	214,450	384,861	1,79464	+ 6	0
			150°		
1	46,220	73,721	1,59501	+ 30	+ 6
2	70,180	114,037	1,62492	— 5	— 5
3	91,940	152,319	1,65672	— 25	— 9
4	113,300	191,806	1,69290	— 5	+ 8
5	135,800	235,795	1,73634	+ 7	+ 3
6	156,560	278,938	1,78169	+ 2	— 14
7	175,200	320,173	1,82747	+ 21	+ 9
8	194,470	365,483	1,87938	— 25	0
9	214,450	416,022	1,93995	+ 7	+ 1

Für die Abhängigkeit der pv-Werte sowohl von der Dichte d, als auch vom Druck p wurden Reihen entwickelt, deren Koeffizienten in den Tabellen III und IV enthalten sind. Die Abweichungen Δ_d und Δ_p ($\Delta = pv_{beob} - pv_{ber}$) der nach diesen Formeln berechneten pv-Werte von den beobachteten sind in der Tabelle II hinter den pv-Spalten hinzugefügt worden.

Tabelle III.

$$pv = A + B_d d + C_d d^2 + D_d d^4 + E_d d^6 + F_d d^8.$$

t in °	A	$B_d 10^3$	$C_d 10^6$	$D_d 10^{12}$	$E_d 10^{18}$	$F_d 10^{24}$
0	1,00045	— 0,45268	2,84424	17,52717	— 207,594	1848,63
25	1,09201	— 0,23750	3,05576	16,25864	— 144,509	1345,19
50	1,18358	— 0,02654	3,24184	17,43044	— 133,395	1178,20
75	1,27515	+ 0,18498	3,38988	18,2642	— 107,652	928,95
100	1,36671	+ 0,37988	3,63775	18,0034	— 52,192	189,70
125	1,45828	+ 0,58847	3,71111	22,3096	— 71,694	— 175,24
150	1,54985	+ 0,78622	3,94533	20,993	— 35,890	— 205,00

Tabelle IV.

$$pv = A + B_p p + C_p p^2 + D_p p^4 + E_p p^6 + F_p p^8.$$

t in °	A	$B_p 10^3$	$C_p 10^6$	$D_p 10^{12}$	$E_p 10^{18}$	$F_p 10^{24}$
0	1,00045	— 0,45890	2,90964	23,1895	— 587,22	4503,8
25	1,09201	— 0,22110	2,65436	5,06187	— 159,266	1008,8
50	1,18358	— 0,01616	2,23372	2,64600	— 95,758	535,08
75	1,27515	+ 0,15299	1,92483	— 0,46531	— 31,6196	163,97
100	1,36671	+ 0,28848	1,69106	— 1,68806	— 8,2022	47,065
125	1,45828	+ 0,41812	1,37824	— 0,56983	— 11,4400	43,566
150	1,54985	+ 0,52421	1,19192	— 0,91694	— 4,5638	18,788

In der Tabelle V sind zur Beurteilung der bisher erreichten Genauigkeit die vergleichbaren pv-Werte mehrerer Beobachter bei verschiedenen Drucken und Temperaturen zusammengestellt.

Tabelle V.

Vergleichbare pv-Werte.

p (Atm.)	Beobachter	Jahr	0°	50°	100°	150°
50	Kamerlingh Onnes	1924	0,9842			
	Smith und Taylor	1926	0,9837	1,1857	1,3833	
	Verschoyle	1926	0,9840			
	Bartlett	1928	0,9846	1,1888	1,3693	
	P. T. R.	1924	0,9851	1,1885	1,3854	1,5786
	Amsterdam	1932	0,9849	1,1884	1,3854	1,5787
100	Amagat	1893	0,9910			
	Smith und Taylor	1926	0,9833	1,1986	1,4056	
	Verschoyle	1926	0,9842			
	Bartlett	1928	0,9846	1,2046	1,4119	
	P. T. R.	1924	0,9861	1,2044	1,4123	1,6136
	Amsterdam	1932	0,9854	1,2045	1,4123	1,6136
150	Smith und Taylor	1926	1,0025	1,2147	1,4371	
	Verschoyle	1926	1,0011			
	P. T. R.	1929	1,0036	1,2312	1,4474	
	Amsterdam	1932	1,0033	1,2315	1,4471	
200	Amagat	1893	1,0390		1,4910	
	Verschoyle	1926	1,0346			
	Smith und Taylor	1926		1,2582	1,4761	
	Bartlett	1928	1,0365	1,2742	1,4963	
	P. T. R.	1929	1,0374	1,2690	1,4908	(1,7021)[1]
	Amsterdam	1932	1,0361	1,2692	1,4889	1,7002

1) Nach der Formel extrapoliert.

Die Übereinstimmung zwischen den zuletzt gemessenen Werten und denen der Reichsanstalt ist recht zufriedenstellend. Sie beträgt fast durchweg nur wenige Zehntel Promille. Nur bei 200 Atm. übersteigt die Abweichung 1 Promille. Die Werte der anderen Beobachter weichen ohne Ausnahme mehr, teilweise sogar beträchtlich ab, vor allen die von Smith und Taylor (bei 50° und 150 Atm. über 1 Proz).

Tabelle VI.

$B \cdot 10^5$.

	0°	Δ	100°	Δ
Otto, Michels und Wouters	−45,9	—	+28,8	—
Holborn und Otto	−47,2	+1,3	+29,1	− 0,3
Amagat	−37,0	−8,9	+33,0	− 4,2
Smith und Taylor	−51,7	+5,8	+17,4	+11,4
K. Onnes und van Urk	−41,0	−4,9		
Verschoyle	−49,6	+3,7		

In der Tabelle VI werden die Isothermenneigungen $B = \left(\frac{d(pv)}{dp}\right)_{p=0}$, welche sich aus den 0°- und 100°-Isothermen als Funktion von p (vgl. Tabelle IV) ergeben, miteinander verglichen. Die Spalte hinter den B-Werten enthält die Differenzen gegen die zuletzt gemessenen Werte. Auch hier ist die gute Übereinstimmung zwischen den Amsterdamer Beobachtungen und denen der Reichsanstalt zu erkennen. Die zuletzt gemessenen Werte liegen dem Mittel aller B-Werte ($-45{,}4 \cdot 10^{-5}$ bzw. $+27{,}1 \cdot 10^{-5}$) am nächsten.

Zusammenfassung.

Es wurden zwischen 0° und 150° mit Temperaturstufen von etwa 25° Stickstoffisothermen mit je 9 Meßpunkten bei Drucken von etwa 45 bis 400 Atm. gemessen. Für die ermittelten pv-Werte wurden Formeln entwickelt, in denen die Dichte d bzw. der Druck p die unabhängige Variable ist. Aus Tabellen sind die Unterschiede einiger pv-Werte und Isothermenneigungen von den entsprechenden vergleichbaren Werten früherer Beobachter zu ersehen.

(Eingegangen 17. Januar 1934.)

Hochfrequenzverluste und Molekülstruktur.

Von P. Debye[1]).

§ 1. Problemstellung.

Nach der Dipoltheorie wird die Drudesche anomale Dispersion in Flüssigkeiten im Gebiete kurzer elektrischer Wellen dadurch erklärt[2]), daß

1. die Moleküle derjenigen Substanzen, welche den Effekt zeigen, polar sind, und
2. die Orientierung dieser Moleküle durch das Feld eine bei hohen Frequenzen merklich werdende Zeit beansprucht.

Zwischen den Feldstärken und der durch sie erzeugten Polarisation besteht deshalb eine Phasendifferenz und diese bedingt eine mit der anomalen Dispersion stets verbundene Absorption, welche nichts mit der Leitfähigkeit im gewöhnlichen Sinne zu tun hat und daher auch im vollkommenen Isolator vorhanden ist. Im einfachsten Fall kann das Molekül in der Flüssigkeit charakterisiert werden durch eine Relaxationszeit τ[3]), welche sich modellmäßig für eine Kugel vom Radius a in einem Medium von der Viskosität η berechnet zu

$$\tau = \frac{4\pi\eta a^3}{kT} \qquad (1)$$

(k = Boltzmannsche Konstante gleich $1{,}37 \cdot 10^{-16}$ erg,
T = absolute Temperatur).

Wirkt nun auf das Dipolmolekül mit dem elektrischen Moment μ ein periodisches elektrisches Feld der Feldstärke

$$F = F_0 e^{i\omega t}, \qquad (2)$$

dann wird das beobachtbare und für die erreichte Polarisation maßgebende mittlere Moment $\overline{m}$ in Richtung der Feldstärke dargestellt durch die Formel:

$$\overline{m} = \frac{\mu^2}{3kT} \frac{F_0 e^{i\omega t}}{1 + i\omega\tau}. \qquad (3)$$

Aus dieser Darstellung folgt ohne weiteres das Verschwinden des Dipoleinflusses auf die Dielektrizitätskonstante mit zunehmender Frequenz, d. h. die anomale Dispersion und gleichzeitig nach bekannten Regeln die Absorption und ihre Frequenzabhängigkeit.

Es dürfte offenbar nicht nur mit Rücksicht auf die Hochfrequenztechnik, sondern auch vom molekularen Standpunkt aus von Interesse sein, Genaueres über die Größe der Relaxationszeiten zu erfahren. Das kann nur auf experimentellem Wege geschehen, denn nach Formel (1) ist selbstverständlich nur eine rohe Schätzung möglich. Experimentell kann man in zweierlei Weise vorgehen; man kann a) die Dispersion der Dielektrizitätskonstante verfolgen, man kann aber auch b) die Verluste direkt messen. Der erste Weg ist schon öfters beschritten worden[1]); so hat beispielsweise Mizushima die Dispersion verschiedener Alkohole genauer beobachtet und seine Resultate zur Bestimmung der Relaxationszeiten verwendet. In diesen und ähnlichen Fällen kommt dem Experimentator zugute, daß die Relaxationszeiten relativ groß sind und deshalb die anomale Dispersion schon mit Wellen von einigen Metern Wellenlänge gut beobachtet werden kann. Andererseits aber beziehen sich diese Beobachtungen auf die reinen Flüssigkeiten, in denen die Dipolmoleküle infolge ihrer dichten Packung daran verhindert werden, ihre charakteristischen Eigenschaften rein und unbeeinflußt zum Ausdruck zu bringen. Verdünnt man, um dem zu entgehen, mit Lösungsmitteln, deren Moleküle nicht polar sind (Benzol, Hexan usw.), so wird dadurch der zu messende Effekt nicht nur deshalb herabgesetzt, weil die Zahl der Dipolmoleküle abnimmt. Gleichzeitig verschiebt sich meistens das Dispersionsgebiet nach immer kürzeren Wellen und erreicht bald eine Gegend, in welcher sowohl die Technik der Wellenerzeugung wie die Messung heute noch mit ganz besonderen Schwierigkeiten verknüpft ist.

Nun kann man zur Bestimmung der Relaxationszeit aber auch den zweiten Weg gehen und die Verluste unmittelbar durch die Erwärmung des Dielektrikums messen. Das Gefäß, in dem die Verluste auftreten, kann dabei als Reservoir eines Thermometers ausgebildet werden, in dessen Kapillare als Maß für die Erwärmung die Steiggeschwindigkeit der Flüssigkeit beobachtet wird. Dieses Verfahren wurde zuerst von J. Malsch[2]) publiziert, er benutzte Wellenlängen

1) Die im folgenden angegebenen experimentellen Zahlenwerte sind das Ergebnis vorläufiger Versuche mehr orientierenden Charakters, welche von Herrn G. Martin im Leipziger Laboratorium ausgeführt wurden. Sie werden fortgesetzt und verbessert.

2) P. Debye, Ber. d. Dtsch. Phys. Ges. **15**, 777, 1913; „Polare Molekeln", Verlag S. Hirzel, Leipzig 1929, S. 88 ff.

3) Entsprechend der von der Kugelgestalt abweichenden Form der Moleküle können für Rotationen um verschiedene Achsen verschiedene Relaxationszeiten maßgebend sein, ein Umstand, den die Herren P. Girard und F. Perrin zur Zeit experimentell und theoretisch verfolgen, wie sie mir das vor kurzem freundlicherweise mitteilten.

1) Literatur vgl. P. Debye, „Polare Molekeln", S. 109.

2) J. Malsch, Physik. Zeitschr. **33**, 19, 1932; Ann. d. Phys. **12**, 865, 1932. Mit der gleichen Methode wurden schon zur Zeit dieser Veröffentlichung Hochfrequenzleitfähigkeiten in Elektrolytlösungen im Leipziger Laboratorium gemessen. Die Erwärmung wurde durch Wirbelströme erzeugt, so daß Elektroden nicht nötig waren.

von 76 m, 48 m und 28 m und maß Erwärmungen nicht nur in Elektrolytlösungen, sondern auch in verschiedenen Alkoholen und einigen organischen Flüssigkeiten. Verlustmessungen durch Erwärmungen, die in üblicher Weise mit einem Hilfsthermometer beobachtet wurden, sind ferner neuerdings im Laboratorium von Esau ausgeführt worden von H. Beck[1]) an Isolierölen im Wellenlängenbereich von 3 m bis 28 m, sowie von H. Haase[2]) an einigen Alkoholen und organischen Bromiden, gleichzeitig bei verschiedener Verdünnung in Benzol oder Xylol und im Bereiche von 3 m bis 7 m.

Betrachtet man als Ziel die Bestimmung der Relaxationszeit in ihrer Abhängigkeit von der Konstitution des Dipolmoleküls und vom umgebenden Lösungsmittel, so ist es bekanntlich nötig, genügend verdünnte Lösungen zu untersuchen, in denen noch Proportionalität zwischen den Verlusten und der Konzentration der Dipolsubstanz besteht, damit die gegenseitigen Wirkungen der Dipolmoleküle vernachlässigbar klein sind. Dagegen ist es nicht nötig, die Frequenzabhängigkeit des Absorptionseffektes zu verfolgen. Man kann also die Erwärmungsversuche mit einer einzigen, auch größeren Wellenlänge ausführen. Bedingung ist nur, daß die Temperaturerhöhung der verdünnten Lösungen noch genau genug meßbar bleibt. Das eigentliche Dispersionsgebiet kann dabei ohne Schaden infolge der Verdünnung nach praktisch unerreichbar kleinen Wellenlängen verrückt sein. Im Interesse der Messung wird man die Meßwellenlänge immerhin nicht zu groß wählen, denn in größerem Abstande des Dispersionsgebietes wachsen die Verluste mit dem Quadrat der Frequenz, so daß bei kleinerer Wellenlänge die Effekte leichter meßbar sind. Diese Überlegungen werden quantitativ formuliert durch die folgende, aus der Dipoltheorie abzuleitende Beziehung[3]), gültig für Frequenzen, die klein sind, verglichen mit der für das Dispersionsgebiet charakteristischen Frequenz ($\omega\tau << 1$).

Wird einem dipolfreien Lösungsmittel der Dielektrizitätskonstante ε und mit dem Molvolumen V cm³ eine geringe Menge einer Dipolsubstanz zugesetzt, so daß der Molenbruch[4]) dieses Zusatzes f ist, so wird in einem Felde der (elektrostatisch gemessenen) maximalen Feldstärke E und der Kreisfrequenz ω pro sec und cm³ eine Wärmeenergie w erzeugt, die sich in erg/cm³ sec berechnen läßt nach der Formel:

$$w = \left(\frac{\varepsilon + 2}{3}\right)^2 \frac{\omega^2\tau}{2V} \frac{N\mu^2}{3kT} fE^2 . \qquad (4)$$

Dabei ist noch τ die Relaxationszeit in sec, $N = 6{,}06 \cdot 10^{23}$ die Loschmidtsche Zahl, μ das Dipolmoment in elektrostatischen Einheiten, $k = 1{,}37 \cdot 10^{-16}$ erg die Boltzmannsche Konstante und T die absolute Temperatur.

Die so bestimmten Werte von τ bilden ein Maß für die reziproke Beweglichkeit der Dipolmoleküle bei ihrer Rotation in dem Lösungsmittel. Sie stellen also Zahlen dar, die in unmittelbarer Analogie stehen zu den üblichen Ionenbeweglichkeiten von elektrolytischen Ionen, welche ihrerseits für die geradlinig fortschreitende Bewegung charakteristisch sind. Dementsprechend wird man die Formel der Gleichung (1) in Analogie setzen zu der bekannten Berechnung der Ionenbeweglichkeiten mit Hilfe der Stokesschen Formel und von Experimenten über die dielektrischen Verluste Aufschlüsse erwarten, die über das für die Ableitung von (1) benutzte einfachste Modell hinausweisen.

Die Versuche, über welche im folgenden § 2 berichtet wird, wurden nach der Methode von Malsch ausgeführt. Das Gefäß des Thermometers hatte einen Inhalt von 60 cm³, die Kapillare einen Durchmesser von 0,2 mm. Im Innern des Thermometers standen einander zwei kreisförmige Platinplatten vom Radius 1 cm in einem Abstand von 1 mm gegenüber. Die Platten bildeten den Kondensator eines Schwingungssystems, das noch mit Hilfe eines nebengeschalteten Mikrokondensators auf Resonanz gebracht werden konnte und induktiv mit einem 3,7 m-Sender gekoppelt war. Die Spannung an den Platten des Flüssigkeitskondensators wurde mit Hilfe eines Röhrenvoltmeters gemessen[1]). Ich möchte hervorheben, daß bei den bisher von Herrn Martin ausgeführten Versuchen noch kein Wert auf große Genauigkeit gelegt wurde. Es sollte vorläufig nur ein Überblick gewonnen werden, um festzustellen, ob die Gesichtspunkte, welche die Dipoltheorie liefert, geeignet sind, und um die Richtung festzulegen für die inzwischen in Angriff genommenen genaueren Bestimmungen.

1) H. Beck, Physik. Zeitschr. **34**, 721, 1933.
2) H. Haase, Physik. Zeitschr. **35**, 68, 1934.
3) Nähere Angaben über die Ableitung im Anhang.
4) Molenbruch des Zusatzes gleich Anzahl Mol des Zusatzes, dividiert durch die Summe der Molzahlen von Zusatz und Lösungsmittel. Im vorliegenden Grenzfall kann natürlich im Nenner die Molzahl des Zusatzes gegen die Molzahl des Lösungsmittels vernachlässigt werden.

1) Das Röhrenvoltmeter war eingerichtet nach den Angaben von L. Rhode, Zeitschr. f. techn. Phys. **12**, 263, 1931.

§ 2. Versuche.

a) Reine Lösungsmittel mit unpolaren Molekülen zeigen keine Verluste.

Sechs verschiedene dipolfreie Flüssigkeiten wurden dem Wechselfelde ausgesetzt. Die Spannung an den Kondensatorplatten wurde nach Angaben des Röhrenvoltmeters konstant gehalten[1]). Es zeigten sich in jedem Falle gut meßbare Erwärmungen, die wie stets im folgenden in mm Steighöhe pro Minute (h) angegeben werden[2]). Gefunden wurden die Zahlen der zweiten Spalte der folgenden Tabelle I.

Tabelle I.

Flüssigkeit	h beob.	h ber.
Benzol (C_6H_6)	6,2	—
Tetrachlorkohlenstoff (CCl_4) ..	6,8	6,9
Dekalin ($C_{10}H_{18}$)	4,5	4,6
Hexan (C_6H_{14})	6,9	7,2
Cyclohexan (C_6H_{12})	6,0	5,7
Schwefelkohlenstoff (CS_2)	7,5	7,3

Es lag nahe, die Ursache dieser Erwärmungen in den dielektrischen Verlusten zu suchen, die im Glase des Behälters insbesondere in der Nähe der Einschmelzstellen der Zuleitungen entstehen müssen. Ähnliche Verluste hat schon Malsch festgestellt, auch ist der zeitliche Verlauf der Erwärmung nach Ein- oder Ausschalten des Feldes deutlich von den Erwärmungen verschieden, über die wir nachher in anderen Flüssigkeiten berichten. Um diese Auffassung näher zu begründen, wurde die für die Benzolfüllung beobachtete Steighöhe $h = 6{,}2$ mm als genau richtig angenommen. Dann wurde, da die Glasverluste auch bei anderen Füllungen dieselben bleiben müssen, auf Grund der spezifischen Wärmen und Ausdehnungskoeffizienten der anderen Flüssigkeiten aus jenen Werten berechnet, welche Steighöhe zu erwarten ist. Diese berechneten Zahlen sind in der dritten Spalte unter h ber. angegeben. Innerhalb der Fehlergrenzen (die aus der Zusammenstellung mehrerer Beobachtungen an einer Flüssigkeit folgen) ist die Übereinstimmung zwischen den beobachteten und den berechneten Werten völlig befriedigend. Wir ziehen deshalb den Schluß, daß tatsächlich keine unter den obwaltenden Versuchsbedingungen beobachtbaren Verluste in den untersuchten 6 dipolfreien Lösungsmitteln auftreten.

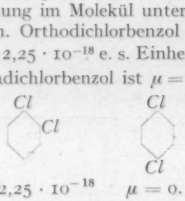
Man kann sich die Frage vorlegen, ob nicht theoretisch doch ein Grund für Verluste auch in dipolfreien Lösungsmitteln vorhanden sein sollte, der mit den für den Kerreffekt maßgebenden Orientierungen verknüpft ist. Tatsächlich werden ja auch dipolfreie Moleküle deshalb orientiert, weil ihre Polarisierbarkeit in verschiedenen Richtungen verschieden groß ist. Dementsprechend zeigt ja Benzol, das in der Ebene des Benzolrings leichter polarisierbar ist als senkrecht dazu, einen sehr deutlichen Kerreffekt, während der Effekt beim symmetrischen Tetrachlorkohlenstoff nur außerordentlich gering ist. Der Betrag der Orientierung ist aber beim Kerreffekt erst dem Quadrat der Feldstärke proportional, und wie eine Rechnung, die hier nicht reproduziert werden soll, zeigt, folgt daraus ein Verlust, welcher der vierten Potenz der Wechselamplitude proportional sein sollte. Die Erwärmung infolge der Relaxation der für den Kerreffekt maßgebenden Orientierung ergibt sich somit als Effekt höherer Ordnung und die quantitative Ausrechnung des Proportionalitätsfaktors hat gezeigt, daß die entsprechende Erwärmung viel zu klein ist, um unter den vorliegenden Versuchsbedingungen beobachtbar zu sein.

b) Verluste treten nur auf bei polaren Molekülen, sie wachsen mit zunehmendem Dipolmoment.

Besonders geeignete Moleküle, um den Einfluß des Dipolmomentes zu untersuchen, sind offenbar solche, die in isomeren Formen vorkommen und dabei je nach ihrem Bau polar oder unpolar sind. Ein schönes Beispiel wird bekanntlich von den Dichlorbenzolen geliefert, in denen die Bindungsmomente $C—Cl$ sich je nach ihrer Anordnung im Molekül unterstützen oder kompensieren. Orthodichlorbenzol hat

$$\mu = 2{,}25 \cdot 10^{-18} \text{ e. s. Einheiten}$$

und für Paradichlorbenzol ist $\mu = 0$.



$\mu = 2{,}25 \cdot 10^{-18}$ $\mu = 0$.

Man hat daher nach Gleichung (4) zu erwarten, daß eine Lösung von Orthodichlorbenzol beispielsweise in Benzol Erwärmung zeigen wird, während diese ausbleiben sollte bei einer Lösung von Paradichlorbenzol in Benzol. Das Resultat solcher Versuche zeigt Tabelle II.

Tabelle II.
Lösungsmittel: Benzol.
(Konzentration: 10 Molprozent.)

Gelöste Substanz	h	$h - h_0$
Orthodichlorbenzol	37	31
Paradichlorbenzol.....	6,3	0,1

1) Zwischen der am Röhrenvoltmeter abgelesenen und der an den Platten herrschenden Spannung ist noch eine Differenz vorhanden. Beide Spannungen sind aber einander proportional, so daß die Konstanz der Plattenspannung gewährleistet ist, ohne daß sie genau bekannt zu sein braucht.

2) Die tatsächliche Temperaturerhöhung ist nur ungefähr 0,01°.

In der zweiten Spalte stehen die beobachteten Steighöhen h. Um ein Maß für die dielektrischen Verluste in den Flüssigkeiten selber zu bekommen, muß davon nach dem Vorhergehenden der Wert $h_0 = 6{,}2$ subtrahiert werden. Was übrigbleibt, ist in der dritten Spalte unter der Bezeichnung $h - h_0$ angegeben. Man sieht, daß innerhalb der zulässigen Fehlergrenzen in der Tat nur die polare Molekülform Verluste herbeiführt. In ähnlicher Weise wurde noch Tetrachlorkohlenstoff (CCl_4, $\mu = 0$) mit Chloroform ($CHCl_3$, $\mu = 1 \cdot 10^{-18}$) in Benzol bei einer Konzentration von 10 Molprozent und Toluol ($C_6H_5CH_3$, $\mu = 0{,}5 \cdot 10^{-18}$) mit Nitrobenzol ($C_6H_5NO_2$, $\mu = 3{,}9 \cdot 10^{-18}$) in Benzol bei einer Konzentration von 2 Molprozent verglichen. Wenn die korrigierte Steighöhe $h - h_0$ mit h^* bezeichnet wird, ergab sich im ersten Falle:

$$h^* = 0{,}6 \quad \text{resp.} \quad h^* = 6{,}7,$$

und im zweiten Falle:

$$h^* = 1{,}6 \quad \text{resp.} \quad h^* = 23.$$

Durch diese Versuche wird belegt, daß bei Molekülen von ungefähr gleichen Dimensionen die Verluste bei Vergrößerung des Dipolmomentes stark ansteigen. Theoretisch sollte der zuerst angegebene Wert $h^* = 0{,}6$ (für CCl_4 in C_6H_6) Null sein, er ist entstanden aus der Differenz von $h = 6{,}8$ für die Lösung und $h_0 = 6{,}2$ für reines Benzol. Mit Rücksicht auf die Schwankungen der Einzelwerte ist aber die Abweichung von Null bei den vorliegenden orientierenden Versuchen noch als Fehler zulässig.

c) Die Verluste wachsen bei gleichbleibendem Dipolmoment mit der Größe des Moleküls.

Nach Gleichung (4) sind die Verluste proportional der Relaxationszeit τ, und wenn wir uns auf die Schätzung nach Gleichung (1) verlassen, sollte τ der dritten Potenz des Radius der Ersatzkugel oder auch dem Volumen des Moleküls proportional sein. Nun ist es von vornherein klar, daß wir hier, weil wir mit der Schätzung (1) operieren und damit die Gestalt des Moleküls außer acht lassen, keine absolut bindenden Voraussagen machen können. Trotzdem wurde ein orientierender Versuch mit zwei Alkoholen gemacht: Methylalkohol (CH_3OH) und Zetylalkohol ($C_{16}H_{33}OH$), gelöst in Benzol mit einer Konzentration von 2 Molprozent. Das elektrische Moment, das der Gruppe COH angehört, ist deshalb für beide Fälle gleich (rund $1{,}7 \cdot 10^{-18}$ e. s. Einheiten). Es wurde gefunden:

$$h^* = 0{,}7 \quad \text{resp.} \quad h^* = 4{,}2.$$

Es ist also in der Tat der Verlust beim größeren Molekül größer.

Man könnte sich auf den ersten Blick darüber wundern, daß die Erwärmung nicht noch mehr zunimmt beim Übergang von einem C-Atom in Molekül zu 16 C-Atomen. Man muß aber bedenken, daß für die Größe des Methylalkohols auch das O-Atom noch sehr wesentlich ist und sollte also das Verhältnis der Volumen der beiden Alkoholmoleküle (unter Anrechnung von ungefähr gleichen Volumina für die C- wie für die O-Atome) nur etwa wie 2:17 schätzen. Im übrigen sind bei den hier diskutierten Versuchen die experimentellen Fehler noch so groß, daß der kleine Wert $h^* = 0{,}7$ für Methylalkohol als sehr ungenau angesehen werden muß. Es muß erst abgewartet werden, bis die geplanten Versuche mit einer Reihe von Alkoholen und mit verbesserter Apparatur durchgeführt sind. Eine Kurve, welche dann die Relaxationszeiten als Funktion der Anzahl C-Atome im Molekül darstellt, dürfte den nötigen Aufschluß bringen.

d) Absolutwerte der Relaxationszeiten, Zusammenhang mit der Viskosität des Lösungsmittels.

Nach Formel (4) kann die Relaxationszeit τ ohne weiteres aus der beobachteten Erwärmung berechnet werden. Im vorliegenden Falle wurden bisher Beobachtungen gemacht über die minutliche Steighöhe von Orthodichlorbenzol in allen 6 benutzten dipolfreien Lösungsmitteln (Konzentration 1,09 Mol/Liter) und von Nitrobenzol (Konzentration 0,23 Mol/Liter) in 4, sowie von Chloroform (Konzentration 1,00 Mol/Liter) in 2 von den Lösungsmitteln. Mit Hilfe von spezifischer Wärme und Ausdehnungskoeffizient folgt daraus die erzeugte Wärmeenergie. Um τ zu berechnen, ist ferner noch die Kenntnis der im Plattenkondensator wirksamen elektrischen Feldstärke notwendig. Gemessen wird die Spannung am Röhrenvoltmeter, und um von dieser auf die Spannung an den Kondensatorplatten zu kommen, muß wegen der allerdings sehr kurzen Zuleitungen noch eine Korrektion angebracht werden, die vorläufig nur angenähert bekannt ist. Infolgedessen sind die unten angegebenen Absolutwerte von τ weniger genau als die beobachteten Steighöhen; ihre Relativwerte leiden natürlich nicht an diesem Übelstand. Für die Amplitude des elektrischen Feldes wurde unter Berücksichtigung aller Umstände der Wert 1600 Volt/cm (5,33 e. s. E.), einer Plattenspannung von 160 Volt entsprechend, angenommen und der Berechnung von τ zugrunde gelegt. Einen Überblick gibt die folgende Tabelle III.

Die Relaxationszeit ist von der Größenordnung 10^{-12} sec, das Dispersionsgebiet ist also bei

Tabelle III.

Lösungsmittel	Viskosität bei 20° C C.G.S.	Relaxationszeiten τ in sec		
		Orthodichlorbenzol	Nitrobenzol	Chloroform
C_6H_{11} ...	0,00326	$1{,}2 \cdot 10^{-12}$	$1{,}9 \cdot 10^{-12}$	—
CS_2	0,00376	$1{,}6 \cdot 10^{-12}$	—	—
C_7H_8	0,00654	$3{,}6 \cdot 10^{-12}$	$4{,}4 \cdot 10^{-12}$	$3{,}9 \cdot 10^{-12}$
C_6H_{12} ...	0,00810	$2{,}1 \cdot 10^{-12}$	$2{,}8 \cdot 10^{-12}$	—
CCl_4	0,00975	$2{,}6 \cdot 10^{-12}$	—	—
$C_{10}H_{18}$ ...	0,02400	$3{,}3 \cdot 10^{-12}$	$5 \cdot 10^{-12}$	$2{,}3 \cdot 10^{-12}$

allen hier untersuchten Lösungen in einen Bereich sehr kleiner Wellenlängen von der Größenordnung einiger mm gerückt. Man kann nun zunächst fragen, ob das der Erwartung entspricht, welche man auf Grund der nach Gleichung (1) auszuführenden Schätzung zu bilden hat. Dazu kann man beispielsweise für Orthodichlorbenzol in Hexan resp. Benzol aus den in der Tabelle III angegebenen Werten unter Heranziehung der dort ebenfalls angegebenen Werte für die Viskosität nach (1) die entsprechenden „Molekülradien" a berechnen. Man findet $a = 1{,}1$ Å resp. $a = 1{,}3$ Å und kommt also in der Tat auf Dimensionen, die der Größenordnung nach richtig sind. Darüber hinaus ist aber sofort ersichtlich, daß die Formel (1) doch völlig unzulänglich ist für eine genauere Beschreibung der Verhältnisse. So sollten nach ihr die Relaxationszeiten derselben Dipolsubstanz in verschiedenen Lösungsmitteln den Viskositäten derselben proportional sein. Die Zahlen der dritten Spalte für die Relaxationszeit des Orthodichlorbenzols wachsen indessen nicht ganz auf das Dreifache, während die Viskositäten beinahe auf das Achtfache ansteigen. Außerdem fällt der Wert für Benzol als Lösungsmittel aus der Reihe. In ähnlicher Weise ist die Relaxationszeit von Chloroform in Dekalin kleiner als in Benzol, trotzdem die Viskosität des ersten Lösungsmittels beinahe 4 mal so groß ist als die des zweiten. Handelt es sich nur um die praktische Frage einer Berechnung der Hochfrequenzverluste, dann braucht man sich mit diesen Überlegungen nicht abzugeben. Relaxationszeit ist dann eine experimentell bestimmte Konstante, ähnlich wie der spezifische Widerstand einer Salzlösung. Darüber hinaus aber ist es vom molekularen Standpunkt aus interessant, die Relaxationszeiten mit der Form der Moleküle und ihrer eventuellen Solvatation in Zusammenhang zu bringen. Dazu muß indessen erst mehr und besseres Beobachtungsmaterial herangeschafft werden; jedenfalls eröffnet das schon in Tabelle III klar zutage tretende, ausgesprochene individuelle Verhalten der verschiedenen Moleküle gute Erfolgsaussichten.

§ 3. Anhang: Berechnung der Verluste in einer Mischung.

Ist eine Phasendifferenz zwischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ und dielektrischer Verschiebung $\mathfrak{D}$ vorhanden, so kann das bekanntlich durch Einführung einer komplexen Dielektrizitätskonstante

$$\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon'' \tag{5}$$

beschrieben werden. Ist $\mathfrak{E}$ der reelle Teil von $E\,\varepsilon^{i\omega t}$, so ist $\mathfrak{D}$ der reelle Teil von $\varepsilon\mathfrak{E}\varepsilon^{i\omega t}$. Andererseits ist die der Volumeneinheit bei einer durch Änderung von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{E} + \delta\mathfrak{E}$ hervorgerufene Änderung von $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{D} + \delta\mathfrak{D}$ zugeführte Energie

$$\delta W = \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{E} \cdot \delta\mathfrak{D}). \tag{6}$$

Faßt man die obigen Aussagen zusammen und integriert die Energiezufuhr über eine längere Zeit, so folgt ohne weiteres für die pro cm³ und pro sec in Wärme umgesetzte Energie der Betrag

$$w = \frac{\omega\varepsilon''}{8\pi} E^2. \tag{7}$$

Man muß also nur noch den imaginären Teil ε'' der Dielektrizitätskonstante ε berechnen. Nun gilt nach dem Clausius-Mosottischen Gesetz für eine Mischung zweier Molekülarten 1 und 2:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\frac{M_{12}}{\varrho_{12}} = \frac{4\pi}{3} N[a_1 f_1 + a_2 f_2]. \tag{8}$$

Hierin sind f_1 und f_2 die Molenbrüche der beiden Bestandteile, a_1 und a_2 die Polarisierbarkeiten der beiden Molekülarten, N $(= 6{,}06 \cdot 10^{23})$ die Loschmidtsche Zahl, ϱ_{12} die Dichte der Mischung und M_{12} das Molekulargewicht der Mischung, definiert durch den Ansatz

$$M_{12} = M_1 f_1 + M_2 f_2, \tag{9}$$

in dem M_1 und M_2 die Molekulargewichte der beiden Bestandteile sind.

Die erste Molekülart sei polar, dann ist bekanntlich im statischen Falle

$$a_1 = \alpha_1 + \frac{\mu^2}{3kT}, \tag{10}$$

wobei α_1 die von der Deformierung herrührende Polarisierbarkeit des Moleküls mißt, μ das Dipolmoment, k $(= 1{,}37 \cdot 10^{-16}$ erg) die Boltzmannsche Konstante und T die absolute Temperatur darstellt. In einem Wechselfeld hat man statt dessen unter Einführung der Relaxationszeit τ:

$$a_1 = \alpha_1 + \frac{\mu^2}{3kT}\frac{1}{1 + i\omega\tau}. \tag{10'}$$

Die zweite Molekülart sei unpolar, dann gilt dafür

$$a_2 = \alpha_2. \tag{10''}$$

Man muß jetzt nur noch (8) nach ε auflösen und in Reelles und Imaginäres trennen, um ε'' und damit nach (7) die Verluste zu finden. Allgemein ergibt sich so

$$\varepsilon'' = \frac{3A''}{(1-A')^2 + (A'')^2} \qquad (11)$$

mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} A' &= \frac{4\pi}{3}\frac{N\varrho_{12}}{M_{12}}\left|\left(\alpha_1 + \frac{\mu^2}{3kT}\frac{1}{1+\omega^2\tau^2}\right)f_1 + \alpha_2 f_2\right|, \\ A'' &= \frac{4\pi}{3}\frac{N\varrho_{12}}{M_{12}}\frac{\mu^2}{3kT}\frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}f_1. \end{aligned}\right| \qquad (11'')$$

Nun sind bekanntlich die aus dem Clausius-Mosottischen Ansatz ableitbaren Beziehungen nur für ideale Mischungen im gesamten Konzentrationsbereich gültig. Für solche ideale Mischungen würde nach (11) und (11′) auf Grund von (7) die Frage nach den Verlusten für alle Mischungsverhältnisse beantwortet sein. In der Tat zeigen die meisten Mischungen bei höheren Konzentrationen Abweichungen von jenem idealen Verhalten, die mit Bezug auf die Dielektrizitätskonstante selber schon vielfach untersucht sind, die aber auch bezüglich der Verluste zu ganz ähnlichen Komplikationen führen müssen. Unter diesen Umständen hat man nur dann das Recht, (11) und (11′) exakt zu verwerten, wenn man sich auf kleine Konzentrationen der Dipolsubstanz in dipolfreien Lösungsmitteln beschränkt. Die Konzentration kann als klein angesehen werden, solange im vorliegenden Falle die Verluste proportional der Konzentration der Dipolmoleküle verlaufen. Wenn das nicht genau der Fall ist, so läuft das experimentelle Verfahren darauf hinaus, daß man aus der Kurve: Verluste als Funktion der Konzentration auf genügend kleine (theoretisch unendlich kleine) Konzentrationen extrapoliert.

Aus diesen Gründen bestimmt man theoretisch die Grenzwerte, zu denen man nach (11) und (11′) kommt, wenn f_1 sehr klein wird und damit $f_2 = 1 - f_1$ nahe an 1 heranrückt. In diesem Grenzfalle wird

$$\varrho_{12} = \varrho_2 \qquad \text{und} \qquad M_{12} = M_2,$$

d. h. Dichte resp. Molekulargewicht des Lösungsmittels, und da der Nenner in (11) nur in nullter Näherung auszurechnen ist, kann $(A'')^2$ neben $(1-A')^2$ gestrichen werden. Man erhält so

$$\varepsilon'' = 4\pi\frac{N\varrho_2}{M_2}\frac{\mu^2}{3kT}\frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}f_1\frac{1}{\left(1-\frac{4\pi}{3}\frac{N\varrho_2}{M_2}\alpha_2\right)^2}.$$

Nun ist aber für das reine Lösungsmittel

$$\frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2 + 2}\frac{M_2}{\varrho_2} = \frac{4\pi}{3}N\alpha_2,$$

man kann also den Nenner ohne weiteres durch die Dielektrizitätskonstante des reinen Lösungsmittels ε_2 ausdrücken und erhält

$$\varepsilon'' = 4\pi\frac{N\varrho_2}{M_2}\frac{\mu^2}{3kT}\frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}f_1\left(\frac{\varepsilon_2+2}{3}\right)^2. \qquad (12)$$

Für die pro cm³ und pro sec erzeugte Wärme folgt schließlich nach (7)

$$w = \left(\frac{\varepsilon_2+2}{3}\right)^2\frac{N\varrho_2}{M_2}\frac{\mu^2}{3kT}\frac{\omega^2\tau}{1+\omega^2\tau^2}f_1E^2. \qquad (12')$$

Die im früheren Text als Gleichung (4) angegebene Verlustformel unterscheidet sich äußerlich von (12′) dadurch, daß die Dielektrizitätskonstante des reinen Lösungsmittels dort nicht mit ε_2, sondern mit ε bezeichnet wurde, daß zweitens das Verhältnis $\frac{M_2}{\varrho_2}$ durch das Molvolumen V_2 des Lösungsmittels ersetzt worden ist und daß drittens der Molenbruch der gelösten Substanz nicht f_1, sondern f genannt wurde.

Materiell ist noch ein Unterschied vorhanden insofern, als Gleichung (12′) Gültigkeit für den ganzen Dispersionsbereich beansprucht, wenn wenigstens das gelöste Dipolmolekül durch eine einzige Relaxationszeit τ charakterisiert werden kann. Wie man sieht, folgt aus der durch den Bruch $\frac{\omega^2\tau}{1+\omega^2\tau^2}$ ausgedrückten Frequenzabhängigkeit, daß bei gegebener Wechselamplitude für größere Werte von τ die Verluste zunächst steil mit der Frequenz ansteigen, aber bei genügend großen Frequenzen einen um so kleineren Grenzwert erreichen, je größer τ ist. Kleinere Relaxationszeiten dagegen bedingen einen schwächeren anfänglichen Anstieg der Verluste, aber dafür einen um so größeren Endwert[1]). Im früheren Text (Gleichung 14) ist mit Rücksicht auf die Kleinheit von τ bei den vorliegenden Versuchen die Größe $\omega^2\tau^2$ neben 1 vernachlässigt worden. Nach der Tabelle III ist der größte hier vorkommende Wert der Relaxationszeit $\tau = 5 \cdot 10^{-12}$ sec, die benutzte Kreisfrequenz war $\omega = 5{,}1 \cdot 10^8$ 1/sec, der Wellenlänge von 3,7 m entsprechend. Es wird daher höchstens $\omega\tau = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ und $\omega^2\tau^2 = 6{,}5 \cdot 10^{-6}$, so daß die Vernachlässigung ohne weiteres erlaubt ist.

1) Da die Ableitung der Dispersionsformel schließlich auf einer Anwendung der Gesetze der Brownschen Bewegung für die Rotation beruht, wird sie dann versagen, wenn die Frequenz so groß wird, daß die Schwingungszeit vergleichbar wird mit der Zeit zwischen zwei molekularen Zusammenstößen.

(Eingegangen 6. Januar 1934.)

Zur Elektronenleitung in Kristallen.

Von R. W. Pohl.

Mit Tafel I.

Vortrag, gehalten am 15. Dezember 1933 vor der Arbeitsgemeinschaft Technisch-Wissenschaftlicher Vereine zu Hannover. Der Vortrag berichtet über Untersuchungen, die Dr. Hilsch, Dr. Mollwo, Dr. Stasiw und der Verfasser gemeinsam ausgeführt haben. Literaturzusammenstellung am Schluß.

Bei jeder Elektrizitätsleitung handelt es sich um die Bewegung oder Wanderung von Elektrizitätsatomen. Man unterscheidet zwei Grenzfälle:

1. Die Elektronenleitung, die Wanderung der Elektrizitätsatome für sich allein.
2. Die Trägerleitung, den Transport der Elektrizitätsatome durch irgendwelche materiellen Träger (Atome, Moleküle, Staub usw.).

Bei der Elektrizitätsleitung in festen Körpern oder Kristallen ist die Elektronenleitung von besonderem Interesse. Sie findet sich in den praktisch wichtigsten Leitern, den Metallen.

Von der Elektronenleitung in Metallen darf man sich folgendes anschauliche Bild machen: n positive Metallionen bilden ein räumliches Gitter und in den Maschen dieses Gitters befinden sich n Elektronen als Elektronengas. Bei ganz tiefer Temperatur bewegen sich die Elektronen widerstandsfrei. Man braucht zur Aufrechterhaltung ihrer Bewegung keine Spannung. Das ist die hochbedeutsame Erscheinung der Supraleitung.

Bei höheren Temperaturen hingegen beobachtet man ganz andere Vorgänge. Der Strom läßt sich nur mit Hilfe einer Spannung aufrechterhalten. Seine Stärke ist der Spannung proportional (Ohmsches Gesetz). Der Leiter wird durch den Strom erwärmt und erfährt seitens der wandernden Elektronen reibungsartige Kräfte (Nachweis z. B. mit der Barlowschen Scheibe). Außerhalb des Bereichs der tiefsten Temperaturen gibt es also eine Wechselwirkung zwischen den Elektronen und den positiven Ionen des Metallgitters. Die Elektronen werden zwar durch das elektrische Feld beschleunigt, müssen aber nach Durchlaufen einer „mittleren freien Weglänge" (bei Zimmertemperatur etwa 10^{-6} cm) ihren Gewinn an Energie und Impuls an die Ionen des Metallgitters abgeben. Infolge dieser ständig wiederkehrenden Verluste bewegen sich die Elektronen im zeitlichen Mittel mit einer konstanten, der Feldstärke proportionalen Wanderungsgeschwindigkeit.

Bei der quantitativen Erforschung der metallischen Leitung stört ein Punkt: Man kann nicht in ein Metall hineinsehen und kann die Wechselwirkung zwischen Elektronen und Materie nicht optisch verfolgen. Diese Unanwendbarkeit der optischen Methoden bedeutet eine sehr wesentliche Beschränkung. Das zeigt am besten ein Vergleich mit der Elektrizitätsleitung in Gasen: Bei diesen hat überhaupt erst die gleichzeitige Anwendung optischer und elektrischer Methoden zu einfachen Ergebnissen geführt.

Bei dieser Sachlage bemühen wir uns seit vielen Jahren, optische Methoden auch für die Erforschung der Elektronenleitung in festen Körpern nutzbar zu machen. Wir untersuchen die Elektronenleitung in klar durchsichtigen Kristallen statt in den für Licht praktisch undurchlässigen Metallen.

Gegen diese Fassung der Aufgabe wird man sogleich zwei Einwände erheben und sagen: Die Lichtundurchlässigkeit der Metalle ist doch keine zufällige, die Beobachtung der Elektronen verhindernde Nebenerscheinung. Sie ist vielmehr gerade durch die Anwesenheit der freien wanderungsfähigen Elektronen bedingt. Umgekehrt beruht die Durchsichtigkeit von Kristallen auf dem Fehlen freier Elektronen. Daher sind durchsichtige Kristalle, wie etwa *NaCl*, typische Isolatoren. – Beide Einwände sind richtig, aber man kann sich ihnen auf einem mittleren Wege entziehen: man bringt in isolierende Kristalle Elektronen hinein, wählt jedoch ihre Zahl in der Raumeinheit um 6 bis 7 Zehnerpotenzen kleiner als in den Metallen. So vermeidet man die optische Undurchlässigkeit der Metalle, hat aber vollständig genug Elektronen, um sie optisch sicher beobachten zu können.

Die erste Aufgabe lautet also: Man hat Elektronen in passender Menge in einen durchsichtigen Kristall hineinzubringen. Das kann auf verschiedene Weise geschehen. Am einfachsten benutzt man die Einwanderung von Elektronen aus einer geeigneten, z. B. spitzen Kathode. Die Fig. 1 (s. Tafel I) zeigt uns diesen Vorgang in einem *KBr*-Kristall mit einer photographischen Aufnahme. Die rechts eintretende Elektronenwolke sieht in diesem Falle blau aus. Nach etlichen Sekunden erfüllt die Wolke den ganzen Kristall bis zur Anode. Durch Umkehr des elektrischen Feldes kann man die Wolke wieder zurückschicken und so fort. Wir beschränken uns hier absichtlich auf eine äußerliche Beschreibung unter bewußter Weglassung einiger wesentlicher Punkte. – Die Farbe der so in die Kristalle hineingebrachten Elektronenwolken (Farbzentren) wechselt mit dem Material und der Temperatur des Kristalles. In *NaCl* bei Zimmertemperatur sieht sie gelb aus, in *KCl* violett usw.

Die optischen Eigenschaften dieser Elektronenwolken (Farbzentren) mußten eingehend

untersucht werden. Für die Frage der Elektronenleitung sind die in den Fig. 2 und 3 dargestellten Ergebnisse von Wichtigkeit. Man entnimmt diesen Figuren zweierlei:

1. Die Färbung der Elektronenwolke entsteht in allen 8 untersuchten Kristallen durch ein Absorptionsspektrum von einfachem Bau. Man findet stets eine glockenförmige Absorptionskurve. In Fig. 2 ist die Frequenz des Bandenmaximums für alle Kristalle gleich 1 gesetzt. Die ausgezogenen Kurven sind nicht durch die Meßpunkte hindurchgelegt, sondern nach den Formeln der klassischen Dispersionstheorie berechnet worden.

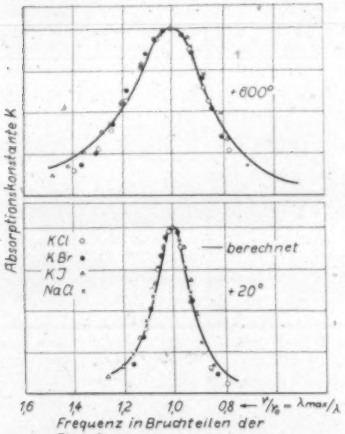


Fig. 2. Die glockenförmige Absorptionskurve der Farbzentren in vier Alkalihalogenidkristallen auf gleiche Frequenz des Bandenmaximums reduziert. Die ausgezogenen Kurven nach der Dispersionstheorie berechnet.

2. Die Temperatur beeinflußt sowohl die Lage des Bandenmaximums wie die Halbwertsbreite der Banden. Dabei sieht man in Fig. 3 eine Wellenlänge λ_F in eigentümlicher Weise ausgezeichnet. Bei ihr ist für alle Temperaturen die optische Absorptionskonstante auf die Hälfte ihres jeweiligen Höchstwertes heruntergesunken. Die Wellenlänge λ_F weist auf einen bisher nicht erreichbaren Grenzfall hin: an die Stelle der „Bande" tritt die „Spektrallinie" eines praktisch ungestörten Elektronenüberganges.

Von diesen optischen Befunden ist uns zunächst der erste von Wichtigkeit, nämlich die einfache Glockengestalt der Absorptionskurve. Sie ermöglicht die optische Berechnung der Elektronenzahl N_0 im cm³. Es gilt

$$N_0 = 1{,}31 \cdot 10^{17} \frac{n_0}{(n_0^2+2)^2} K \cdot 2\mu .$$

n_0 = Brechungsindex des Kristalls im Gebiet des Bandenmaximums,
2μ = ganze Halbwertsbreite der Bande in e-Volt,
K = die Absorptionskonstante in cm^{-1} (gemäß $J = J_0 \cdot e^{-Kd}$, wo d Schichtdicke in cm).

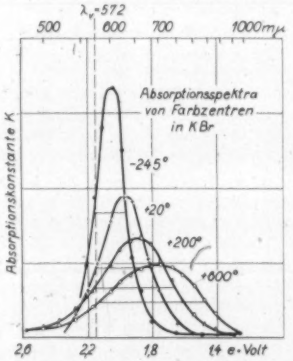


Fig. 3. Einfluß der Temperatur auf das Absorptionsspektrum der Elektronenwolke (Farbzentren) in KBr.

Mit dieser Gleichung findet man für die in Fig. 1 photographierte Elektronenwolke eine Konzentration der Größenordnung 10^{17} Elektronen im cm³. Damit kommen wir auf die Frage der Elektroneneinwanderung zurück. Oben wurde nur von einer Einwanderung aus einer spitzen Kathode gesprochen. Das ist vollkommen richtig, aber nicht zureichend. Das zeigt eine Überschlagsrechnung.

Ein Kristall von 1 cm³ Größe hat eine Kapazität von etwa 10^{-12} Farad, 10^{17} Elektronen haben eine Gesamtladung von rund 10^{-2} Amp.-Sekunden. Sie müßten also zwischen dem Kristall und seiner Umgebung eine Spannung von etwa 10^{10} Volt hervorrufen. Diese Spannung ist um etwa 8 Zehnerpotenzen höher als die zwischen Spitze und Anode in Fig. 1 benutzte. Außerdem erzeugt sie elektrostatische Drucke von rund 10^8 Atmosphären, und bei solchem Druck müßte der Kristall explodieren.

Infolgedessen kann die Einwanderung der Elektronen in Wirklichkeit nicht ohne einen Ladungsausgleich vor sich gehen. Beim Eintritt der Elektronen muß eine gleiche Anzahl von Anionen den Kristall verlassen, man braucht

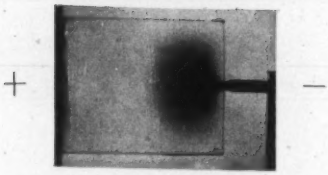


Fig. 1. Einwanderung von Elektronen aus einer spitzen Kathode in einen *KBr*-Kristall.

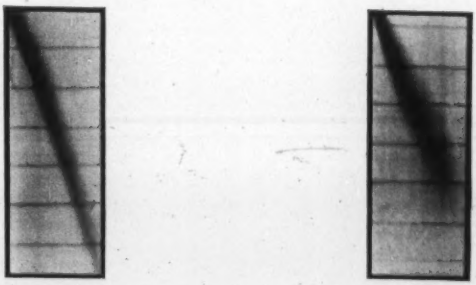


Fig. 5a. Fig. 5b.

Fig. 5a und b. Photographische Bahnspuren der Farbzentrenelektronen auf bewegter Platte. In Fig. 5a 650 Zentrigrad; $5{,}5 \cdot 10^4$ Volt/m. In Fig. 5b 560 Zentrigrad; $6{,}9 \cdot 10^4$ Volt/m. Geschwindigkeit der photographischen Platte in beiden Fällen 9 mm/sec.

einen elektrolytischen Ladungsausgleich. Die elektrolytische Leitung der Alkalisalze ist bei Zimmertemperatur sehr gering, doch steigt sie exponentiell mit der Temperatur. Infolgedessen gelingt die Elektroneneinwanderung erst bei einer Erwärmung des Kristalls auf einige hundert Zentigrad.

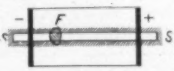


Fig. 4. Zur photographischen Messung der Wanderungsgeschwindigkeit der Elektronen mit einer vertikal bewegten Platte.

Die entscheidende Rolle des elektrolytischen Ladungsausgleichs bei der Einwanderung der Elektronen zeigt sich besonders deutlich bei der Messung ihrer Geschwindigkeit. Man sieht in Fig. 4 einen kistenförmigen Kristall mit zwei Elektroden und zwischen diesen eine Elektronenwolke *F*. Diese Wolke wandert hinter dem Spalt *SS* nach rechts und sie wird mit einer vertikal aufwärts bewegten Platte photographiert. Die Bahn der Elektronen markiert sich als breiter, schräg nach rechts unten verlaufender Strich (Fig. 5, s. Tafel I). Bei hohen Temperaturen (Fig. 5a) hat dieser Strich parallele Grenzen, die Elektronengeschwindigkeit ist einheitlich. Bei tiefer Temperatur (Fig. 5b) hingegen fächert die Elektronenwolke auseinander. Man hat Höchst- und Kleinstwerte der Geschwindigkeit zu unterscheiden.

Die Ergebnisse solcher Geschwindigkeitsmessungen findet man in Fig. 6. Die Ordinate ist logarithmisch geteilt, die Abszisse proportional zu $1/T_{abs}$. Rechts daneben ist in Fig. 7 die elektrolytische Leitfähigkeit des gleichen Kristallstücks (ohne Elektronenwolke!) dargestellt, und zwar mit der gleichen Teilung von Ordinate und Abszisse. Oberhalb des Knickpunktes überwiegt die „Eigenleitung" des Kristalls (steile Gerade), unterhalb hingegen die „Störleitung" (flache Gerade). Die Elektronengeschwindigkeit in Fig. 6 geht der elektrolytischen Leitfähigkeit in Fig. 7 in klar ersichtlicher Weise parallel. Das Temperaturgebiet der Störleitung ist zugleich das der inhomogenen Elektronengeschwindigkeit. Die Kleinstwerte dieser Geschwindigkeit erscheinen als die normalen, die Höchstwerte als die abnormen. Die hohen Geschwindigkeiten sprechen für die Anwesenheit elektrolytisch besonders gutleitender Kanäle oder sonstwie ausgezeichneter Leitungsbahnen.

Den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen bildete die Elektronenleitung in Metallen. Dort gab es keinen elektrolytischen Ladungsausgleich. Darin wird man eine starke Abweichung gegenüber der Elektronenleitung in unseren Salzen sehen. Dem ist aber entgegenzuhalten: der Ladungsausgleich durch gleichzeitig wandernde Ionen ist in den Salzen zwar zur Ausbildung der Elektronenwolke notwendig. Er wird aber entbehrlich, sobald der ganze Kristall bis zur Anode von der Wolke erfüllt ist. Dann hat man den Fall eines „stark verdünnten" Metalls. 1 cm³ *Cu* enthält rund je 10^{23} Elektronen und positive Metallionen. Unser Alkalisalz hingegen erhält im cm³ etwa 10^{17} Elektronen und einen gleichgroßen stöchiometrischen Überschuß an positiven Alkaliionen. Die Kathode liefert Elektronen nach, die Anode nimmt sie auf, die Elektronen laufen zwischen dem feststehenden Bestand positiver Überschußionen hindurch. So wird das Salz praktisch zu einem reinen Elektronenleiter, der gleichzeitig vorhandene Ionenstrom wird zu einer völlig unerheblichen Nebenerscheinung. Seine Größe beträgt kaum noch 1 Promille von der des Elektronenstroms.

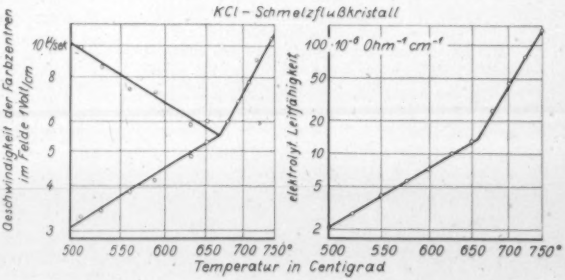


Fig. 6. Einfluß der Temperatur auf die Geschwindigkeit der Farbzentrenelektronen im elektrischen Felde 1 Volt/cm.

Fig. 7. Einfluß der Temperatur auf die elektrolytische Leitfähigkeit des in Fig. 6 benutzten *KCl*-Kristalls.

Zahlenbeispiel: *KCl*-Kristall bei 390°, 550 Volt/cm. Länge 19 mm, Querschnitt der Strombahn 60 mm².

Elektrolytischer Strom	$2{,}5 \cdot 10^{-5}$ Ampere
Durchlaufender Elektronenstrom	$4000 \cdot 10^{-5}$ Ampere
Unterbrochener Elektronenstrom (nach Feldumkehr; vor der bisherigen Anode ein schmaler elektronenfreier Kristallstreifen mit elektrolytischem Ladungsausgleich)	$100 \cdot 10^{-5}$ Ampere

Jetzt greifen wir auf die optischen Beobachtungen zurück. Die Elektronenwolke zeigte eine glockenförmige Absorptionsbande. Ihre Breite wuchs mit steigender Temperatur (Fig. 3). Doch blieb der Kristall selbst bei den höchsten Temperaturen im Ultraroten durchlässig. Das bedeutet im Bilde der klassischen Darstellungsart: die Elektronen sind im Salz nicht dauernd freibeweglich wie im Metall. Dann müßten sie ein kontinuierliches Spektrum haben. Die Elektronen sind irgendwie im Gitter gebunden. Folglich muß man die Elektronen für die Wanderungen im elektrischen Feld vorübergehend freimachen. Das kann sowohl durch thermische wie optische Energiezufuhr geschehen. Dann laufen die Elektronen ein Stück im Felde, werden wieder eingefangen, abermals abgespalten und so fort. Der jedesmal frei zurückgelegte Weg heißt der mittlere „Schubweg". Er kann eine ganze Anzahl der oben genannten mittleren freien Weglängen umfassen. Der mittlere Schubweg beträgt bei einer Feldstärke von 500 Volt/cm in *NaCl* etwa 10^{-5} cm, in *AgCl* bis zu 1 cm. Noch größere Schubwege hat man in gewissen Metalloxyden und Sulfiden anzunehmen. Zweifellos gibt es einen stetigen Übergang zum Grenzfall des Metalls mit seinen dauernd freien Elektronen, also Schubwegen von unendlicher Größe.

Mit der Erwähnung der thermischen Abspaltung wird endlich der erste Versuch, die Elektroneneinwanderung in Fig. 1, erschöpfend klargestellt. Die Erwärmung des Kristalls soll zweierlei bewirken:

1. den elektrolytischen Ladungsausgleich,
2. die ständige Wiederabspaltung der hängenbleibenden Elektronen.

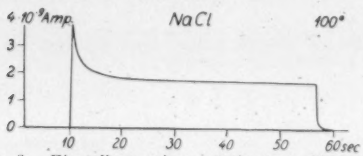


Fig. 8. Einstellung eines stationären lichtelektrischen Elektronenstroms in einem farbzentrenhaltigen *NaCl*-Kristall bei 100°. Der Dunkelstrom ist praktisch unbeteiligt. Einstelldauer des Registrierstrommessers 0,3 sec.

Die optische Elektronenabspaltung bringt gegenüber der thermischen nichts prinzipiell Neues[1]), nur erlaubt sie, die Elektronenleitung auch bei tieferen Temperaturen zu untersuchen. Dann fehlt der elektrolytische Ladungsausgleich und demgemäß zeigen lichtelektrische ausgelöste Elektronenströme eine erhebliche Polarisation (Fig. 8): der stationäre Strom ist viel kleiner als der Einsatzwert. Das bedeutet:

a) es bilden sich beim Vorrücken der Elektronen auf die Anode zu lokale innere Gegenfelder[1]) im Kristall,
b) unter der Einwirkung dieser lokalen inneren Felder übernehmen die Elektronen selbst einen teilweisen Ladungsausgleich. Sie rücken an den Ort der vorher abgewanderten Vordermänner (zeitlich beliebig langandauernde Ströme verlangen auch hier eine Elektronennachlieferung seitens der Kathode).

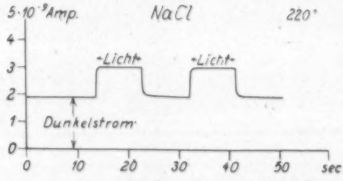


Fig. 9. Einstellung des stationären lichtelektrischen Stroms beim Überwiegen des elektrolytischen Dunkelstroms. Einstelldauer des Registrieramperemeters 0,3 sec.

In dem Beispiel der Fig. 8 war der elektrolytische Strom neben dem der Elektronen vollständig zu vernachlässigen. Bei höherer Temperatur kann jedoch der elektrolytische Dunkelstrom die Größe des lichtelektrischen erreichen oder gar übertreffen. Dann können die Elektronen unbehindert abwandern. Der Ladungsausgleich wird vom elektrolytischen Strom übernommen. Der stationäre Wert des lichtelektrisch ausgelösten Elektronenstromes ist ebenso hoch wie sein Einsatzwert. Die Fig. 9 zeigt ein typisches Beispiel.

Bei den bisher behandelten Fällen der lichtelektrischen Elektronenleitung waren die Elektronen zuvor aus einer spitzen Kathode oder nach einem gleichwertigen Verfahren von außen in den Kristall hineingebracht worden. Das Licht hatte die Elektronen nur aus dem sichtbaren Zustande der Bindung (Farbzentren) in den Zustand freier Beweglichkeit zu versetzen. In anderen Fällen muß hingegen das Licht die

1) Sofern man, wie oben ausdrücklich erwähnt, sich des klassischen Bildes bedient. Im Bilde der Quantentheorie entsteht die Farbzentrenbande durch einen Elektronenübergang zwischen zwei Energieniveaus des Kristalles. Im oberen Niveau sind die Elektronen nach den Experimenten sicher beweglich, im unteren, falls überhaupt, nur bei hoher Temperatur.

1) Unter dem Einfluß dieser inneren Gegenfelder wird die glockenförmige Absorptionskurve für einen Teil der Farbzentren verflacht und in Richtung langer Wellen verschoben. Das ist der als „Erregung" bekannte Vorgang. Vgl. B. Gudden und R. W. Pohl, Zeitschr. f. Phys. **31**, 9, 1925.

wanderungsfähige Elektronenwolke, die Farbzentren, erst selbst erzeugen. Damit geraten wir auf ein anderes Gebiet, nämlich das der Photochemie und des latenten photographischen Bildes. Über dies Gebiet habe ich vor Jahresfrist zusammenfassend berichtet. Die wesentlichen Punkte waren

1. die Silbersalze nehmen hinsichtlich ihrer Lichtempfindlichkeit keine Sonderstellung ein, die Alkalisalze sind praktisch ebenso lichtempfindlich.
2. Das Ergebnis des photochemischen Elementarprozesses in den Alkalisalzen ist eine farbzentrenbildende Elektronenwolke.
3. Sie ist in dicken Salzkristallen ohne weiteres sichtbar, die Latenz der photographischen Lichtwirkung in der unentwickelten photographischen Platte beruht lediglich auf deren zu geringen Schichtdicke.

Neuerdings haben wir die Konzentration der photochemisch erzielbaren Farbzentren erheblich steigern können, und zwar durch eine besondere Vorbehandlung der Kristalle. Solche Kristalle sind im Sichtbaren nicht von gewöhnlichen zu unterscheiden, im Ultravioletten hingegen sind sie durch eine neue, sehr charakteristische Absorptionsbande ausgezeichnet. Eine Lichtabsorption in dieser „U-Bande" liefert uns die Elektronen.

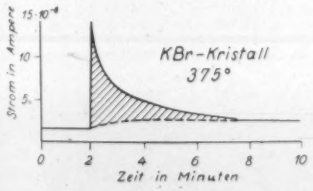


Fig. 10. Die Produkte des photochemischen Elementarprozesses in einem KBr-Kristall, die sichtbaren Farbzentren des latenten Bildes, werden mit einem elektrischen Feld aus dem Kristall herausgezogen und ihre Gesamtladung wird als schraffierte Stromzeitfläche gemessen. Der elektrolytische Dunkelstrom liegt am Schluß des Versuches stets etwas höher.

Einen solchen Kristall bringen wir in ein elektrisches Feld und strahlen ultraviolettes Licht ein. Dann sehen wir die Entstehung des latenten Bildes, es entsteht die Elektronenwolke der Farbzentren. Diese wandert vor unseren Augen aus dem Kristall heraus. Ein in den Stromkreis geschaltetes Amperemeter zeigt den in Fig. 10 skizzierten Stromverlauf. Die schraffierte Stromzeitfläche bedeutet die gesamte, von den Elektronen transportierte Ladung. Sie entspricht recht genau der zuvor optisch ermittelten Elektronenzahl.

So sind hier zwei durchaus verschiedenartige Probleme, nämlich das der metallischen Leitung und das des latenten photographischen Bildes, in einen engen Zusammenhang gebracht worden. In solcher vereinfachenden Zusammenfassung scheinbar ganz wesensverschiedener Gebiete liegt ja ein Hauptreiz der physikalischen Forschung. Selbstverständlich konnten im Rahmen eines Vortrages nur ein paar Stichproben gebracht werden. Aber sie lassen hoffentlich einige Fortschritte auf dem Gebiete der Elektronenleitung in festen Körpern erkennen.

Literaturverzeichnis.

R. Hilsch u. R. W. Pohl, „Drei physikalische Versuche". Naturw. **20**, 932, 1932.
R. Hilsch u. R. W. Pohl, „Das latente photographische Bild." Naturw. **21**, 261, 1933.
R. Hilsch u. R. W. Pohl, „Eine neue Lichtabsorption in Alkalihalogenidkristallen." Gött. Nachr. (Math.-Phys. Kl.) 322, 1933.
R. Hilsch u. R. W. Pohl, „Zur Photochemie der Alkalihalogenidkristalle". Gött. Nachr. (Math.-Phys. Kl.) 406, 1933.
R. Hilsch u. R. W. Pohl, „Zur Elektronenleitung in Alkalihalogenidkristallen". Zeitschr. f. Phys. **87**, 78, 1933.
E. Mollwo, „Über die Farbzentren der Alkalihalogenidkristalle". Zeitschr. f. Phys. **85**, 56, 1933.
O. Stasiw, „Die Farbzentren des latenten Bildes im elektrischen Felde". Gött. Nachr. (Math.-Phys. Kl.) 261, 1932.
O. Stasiw, „Zur elektrischen Wanderungsgeschwindigkeit der Farbzentren in Alkalihalogenidkristallen". Gött. Nachr. (Math.-Phys. Kl.) 387, 1933.

I. Physikalisches Institut der Universität Göttingen, Dezember 1933.

(Eingegangen 8. Januar 1934.)

Die Feinstruktur der Rayleighstrahlung.

(Vorläufige Mitteilung.)

Von W. Ramm.[1])

Mit Tafel II.

Die bei der Streuung von monochromatischem Licht in Flüssigkeiten erhaltene Rayleighstrahlung wurde mit den beiden Stufengittern des Leipziger Instituts auf ihre Struktur in unmittelbarer Umgebung der eingestrahlten Frequenz untersucht. In einer ersten Mitteilung[2]) wurden die Ergebnisse von Streuversuchen veröffentlicht, die mit dem kleineren Stufengitter unter Verwendung der Linie 4358 des Quecksilberbogens als Primärlicht ausgeführt wurden.

1) Vorgetragen auf der Tagung des Gauvereins Thüringen-Sachsen-Schlesien der Deutschen Physikal. Ges. am 8. und 9. Januar in Halle a. S.

2) Meyer und Ramm, Physik. Zeitschr. **33**, 270, 1932.

Schon diese Versuche machten es wahrscheinlich, daß an Stelle einer eingestrahlten einfachen Linie im Streuspektrum ein Triplett auftritt, ein Resultat, das sich nach zuerst von Brillouin[1]) entwickelten Vorstellungen verstehen läßt.

Nach Brillouin muß nämlich bei Streuung von Licht der Wellenlänge λ in einem festen Körper ein Dublett entstehen, dessen Linien um

$$d\lambda = \pm 2\lambda \frac{v}{c/n} \sin \frac{\vartheta}{2} \qquad (1)$$

nach Rot und Blau gegen λ verschoben sind (v und c/n Schall- bzw. Lichtgeschwindigkeit im Kristall, ϑ Streuwinkel). Da man zur Ableitung dieser Formel[2]) nur voraussetzen muß, daß die im Kristall auftretenden spontanen Dichteschwankungen der Wärmebewegung nicht unabhängig voneinander sind, sondern sich im Sinne der Debyeschen Theorie der spezifischen Wärme durch Superposition von Wärmewellen darstellen lassen, so kann man verstehen, daß die Theorie Brillouins auch für Flüssigkeiten richtig sein kann. Ein Triplett entsteht aus dem durch (1) dargestellten Dublett durch Hinzunahme der Primärlinie λ, für deren Auftreten im Streuspektrum verschiedene Erklärungen möglich sind.

Zuerst fand Gross[3]) bei Streuung an Flüssigkeiten mit seinem Stufengitter die durch (1) geforderten Linien, aber er glaubte auch an die Existenz weiterer äquidistanter Linien, die um größere Beträge verschoben waren und nicht durch (1) dargestellt wurden. Wir bezweifelten schon nach unseren ersten Aufnahmen das Vorhandensein dieser Linien „höherer Ordnung". Eine sichere Entscheidung war aber aus den mit Hilfe der *Hg*-Lampe hergestellten Aufnahmen nicht möglich, weil die bei allen *Hg*-Linien vorhandenen Trabanten, die in ähnlichen Abständen von der Hauptlinie liegen wie die Aufspaltungen nach (1) (0,04–0,10 Å), das Strukturbild sehr verwirren und leicht neue Linien vortäuschen können (s. Meyer und Ramm, l. c., Tafel 1).

Für die weitere Untersuchung mußte daher eine starke Lichtquelle mit einfachen Linien beschafft werden. Es gelang nach längeren Versuchen, Streuaufnahmen mit der trabantenfreien *Zn*-Linie 4680 herzustellen. In einer Quarzlampe eigener Konstruktion wurde ein Lichtbogen mit ungefähr 5 Amp. zwischen reinen *Zn*-Elektroden gebrannt. Da diese *Zn*-Lampen eine viel kürzere Lebensdauer haben als die *Hg*-Lampen, wurden die Aufnahmen meist ohne vergrößerndes Telesystem hergestellt. Man erhält dann sehr kleine Bilder mit nur 0,23 mm Abstand zwischen zwei Ordnungen, kommt aber z. B. bei Toluol mit nur einer Stunde Belichtungszeit aus. Die experimentelle Anordnung war im wesentlichen die gleiche wie die in der ersten Mitteilung beschriebene, nur wurde jetzt mit Monochromator gearbeitet. Der Streuwinkel betrug wieder 180°, dieser Winkel liefert ja nach (1) den größten Effekt.

Die Tafel zeigt Vergrößerungen (ungefähr 12fach) der so mit den beiden Stufengittern von 16 und 33 Stufen (Dispersionsgebiet für *Zn* 4680 0,33 bzw. 0,22 Å) erhaltenen Aufnahmen. Die durch Streuung an weißem Papier hergestellten Vergleichsaufnahmen werden jedesmal unter der zugehörigen Streuaufnahme gebracht, sie bestehen aus scharfen, einfachen Linien. Die drei oberen Aufnahmen (Fig. 1–3) wurden bei Streuung an Toluol erhalten, und zwar Fig. 1 in der Einfachordnungsstellung des kleinen Stufengitters bei dreifach vergrößerndem Telesystem, Fig. 2 und 3 in der Doppelordnungsstellung des großen bzw. kleinen Stufengitters ohne Telesystem. Da alle Reproduktionen der Tafel gleich stark vergrößert sind, hat Fig. 1 den dreifachen Maßstab aller übrigen Bilder. Alle Streuaufnahmen zeigen das Auftreten von zwei neuen Linien in gleichem Abstand rechts und links von der Hauptlinie, bei den Aufnahmen in der Doppelordnungsstellung sind infolge des steilen Abfalls der Beugungskurve der Gitterspalte die inneren Trabanten (zwischen den beiden Ordnungen) verstärkt, die äußeren so stark geschwächt, daß sie nicht mehr zu erkennen sind. Die Aufspaltung ist in Fig. 2 größer als in Fig. 3, weil das große Stufengitter das kleinere Dispersionsgebiet hat. Die Aufnahmen 4 und 5 wurden bei Streuung an Schwefelkohlenstoff mit dem großen bzw. kleinen Stufengitter ohne Telesystem hergestellt, auch sie zeigen die gleiche Aufspaltung wie 2 und 3, nur nicht so deutlich, weil hier eine stärkere kontinuierliche Schwärzung auftritt. Auch die folgenden Photometerkurven, die zu den Fig. 2 und 4 gehören, lassen die neuen Linien sehr deutlich erkennen.

Die Intensitätsverhältnisse sind in den Photometerkurven noch sehr verzerrt. Bei CS_2 z. B. erscheinen die verschobenen Linien stärker als die nur als Ausbuchtung kommende Mittellinie, in Wahrheit ist aber auch hier die Mittellinie am stärksten. Die Frage, wie weit diese Mittellinie nur durch Einfluß des Hintergrunds (bei 180°-Streuung sehr unangenehm) und infolge nicht ideal staubfreier Flüssigkeit entstanden und wie weit sie eigentlicher molekularer Streuung zu verdanken ist, wurde noch nicht ganz

1) Brillouin, Ann. de Phys. **17**, 88, 1922.
2) Ableitung s. z. B. Debye, Physik. Zeitschr. **33**, 849, 1932.
3) Gross, Nature **126**, 201, 400, 603, 1930; **129**, 722, 1932.

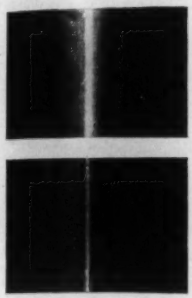


Fig. 1.

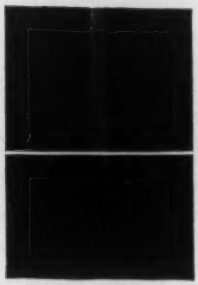


Fig. 2.

Toluol.

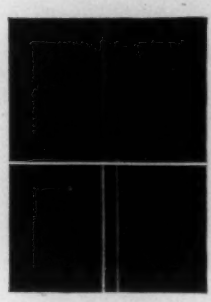


Fig. 3.

Fig. 4.

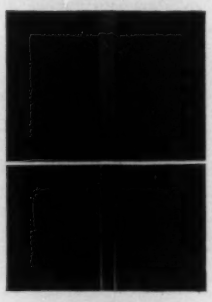


Fig. 5.

Schwefelkohlenstoff.

Fig. 6.

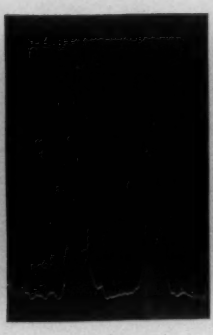


Fig. 7.

Toluol.

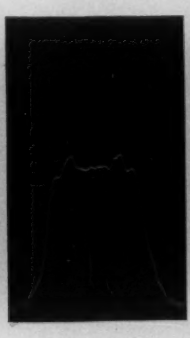


Fig. 8.

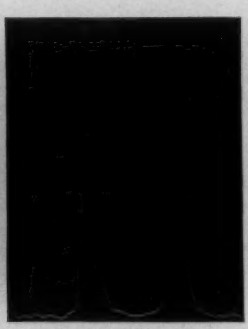


Fig. 9.

Schwefelkohlenstoff.

gelöst, aber es scheint nach den Versuchen nicht wahrscheinlich, daß man sie vollkommen wegbekommen kann. Die Photometerkurven wurden bei allen Aufnahmen entzerrt; die so entstandenen wahren Intensitätskurven werden zusammen mit einer genaueren Beschreibung der Versuchsanordnung und eingehender Diskussion der Streuaufnahmen in kurzer Zeit erscheinen. Als wichtigste Ergebnisse sind vorläufig zu nennen:

1. Die von der Wärmewellentheorie geforderten, nach Rot und Blau verschobenen Linien sind einwandfrei nachgewiesen. Ihr Abstand von der Hauptlinie stimmt bei den untersuchten Substanzen: Toluol, Schwefelkohlenstoff, Tetrachlorkohlenstoff innerhalb der Meßgenauigkeit mit dem aus (1) berechneten überein.
2. Weitere Linien höherer Ordnung treten nicht auf, auch nicht bei stark anisotropen Substanzen ($C_6H_5CH_3$, CS_2), bei denen sie Gross besonders deutlich fand. Dagegen macht sich ein kontinuierlicher Grund mit wachsender Anisotropie immer mehr bemerkbar. [Vgl. dazu die Ergebnisse von Gerlach[1]), Weiler[2]), Rousset[3]) u. a.]

Herrn Professor Dr. P. Debye möchte ich für sein Interesse an dieser Untersuchung bestens danken.

1) Gerlach, Ann. d. Phys. **1**, 301, 1929.
2) Weiler, Zeitschr. f. Phys. **68**, 782, 1931.
3) Rousset, Journ. d. Phys. (VII) **3**, 555, 1932.

(Eingegangen 12. Januar 1934.)

Über die Sperrschicht am Bleisulfid.

Von F. Heineck.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit schließt sich an die Untersuchungen von Trey (1), Vrede (2) und Demberg und Siemens (3) über Detektoren an und hatte vor allem den Zweck, die Natur der Sperrschicht aufzuklären. Die Existenz der Sperrschicht ist durch die Arbeiten von Schottky, Störmer und Waibel (4) am Cu_2O und durch die von Demberg und Siemens an *PbS* sichergestellt, aber über die chemische Natur und den Aufbau derselben haben die Versuche bisher nicht zu eindeutigen Resultaten geführt; es schweben daher auch die diesbezüglichen Hypothesen in der Luft. Das Problem kann erst als geklärt gelten, wenn es gelingt, die Sperrschicht unter genau kontrollierbaren Bedingungen beliebig oft zu erzeugen und zu vernichten.

Versuchsanordnung.

Es wurde, um Polarisationserscheinungen auszuschließen, nicht die Gleichstromcharakteristik aufgenommen, sondern es wurde auf die Gleichrichterwirkung subjektiv aus der Lautstärke geschlossen, und zwar an möglichst vielen Stellen (100–150); wie bekannt sind selbst bei den besten Detektoren manche Stellen inaktiv. Je nachdem der Empfang sehr laut, laut, mittel oder leise war, wurde der betreffenden Stelle des Kristalls eine der Zahlen 1–4 zugeordnet. Stellen, die gar keinen Empfang zeigten, erhielten die Note 5. Die Note 2 entspricht etwa dem normalen Empfang eines zum Vergleich verwendeten Kristalldetektors *PbS* von Telefunken. Durch Häufung der untersuchten Stellen wurde ein im folgenden als Gleichrichtungsfaktor bezeichneter Wert erhalten, der als Charakteristikum für die Gleichrichterwirkung der betreffenden Substanz angesehen wurde. Um Platz zu sparen, gebe ich keine Zahlen.

Die Versuchsanordnung hatte folgenden Anforderungen zu genügen:

1. Die Untersuchungen mußten im Vakuum vorgenommen werden können.
2. Auch im Vakuum mußte es möglich sein, bei den Messungen verschiedene Oberflächenpunkte zu erfassen.
3. Es mußte die Möglichkeit bestehen, die obersten Schichten der Substanz im Vakuum zu entfernen.
4. Zur Feststellung der Gleichrichterwirkung mußte die zu untersuchende Substanz als Detektor in eine Rundfunkempfangsanlage geschaltet werden können.

Die Zelle (Fig. 1) besteht aus einem luftdicht schließenden Messingkasten (*A*), der zur Verfolgung der Vorgänge im Innern mit zwei Fenstern versehen ist. Rechts und links unten sind einander gegenüber zwei Messingrohre (*B*) und (*C*) angebracht. Das rechte dient dazu, die Haltevorrichtung für die zu untersuchende Substanz einzuführen. Dies geschieht mit Hilfe eines Normalschliffes (*D*). Das linke (*C*) enthält die Schabevorrichtung. Ein Stutzen (*E*) ist im Mittelpunkt des oberen Deckels eingelötet. Er enthält einen Normalschliff, durch den die Gegenelektrode in die Zelle eingeführt wird.

Die Befestigungsweise der zu untersuchenden Substanz ist aus der Figur zu ersehen. Das betreffende Stück wird in einem Messingkästchen (*F*) von sechs Schrauben festgehalten. Um eine gute Anpassung an die Formen des Kästchens zu erzielen und vor allem, um den Kontakt möglichst innig zu gestalten, ist die Unterseite der Substanz mit Stanniol umwickelt. Sie wird so eingeschraubt, daß sie etwas über den Rand des

Kästchens herausragt. Unten an dem Kästchen sind zwei Messingstangen (*G*) angelötet. Sie führen durch einen in den abnehmbaren Teil des Schliffes (*D*) gekitteten Hartgummistopfen (*H*) nach außen (die Hartgummiteile sind in der Figur schraffiert). Ein zweiter solcher Stopfen (*J*) ist über die beiden Stangen geschoben. Er ist den Maßen des in den Stutzen gekitteten Teiles des Schliffes genau angepaßt und dient zur Stabilisierung.

Die Entfernung der obersten Schicht der Substanz wird durch Abkratzen mit einem dreieckigen Stahlkeil (*K*) erreicht. Er ist am Ende einer Stahlfeder befestigt und wird mit Hilfe eines Elektromagneten (*L*) bewegt. Zum Abkratzen und zum Untersuchen der Detektorwirkung wurde das die Substanz enthaltende Kästchen mit Hilfe des Schliffes (*D*) um 90° gegen die gezeichnete Stellung gedreht.

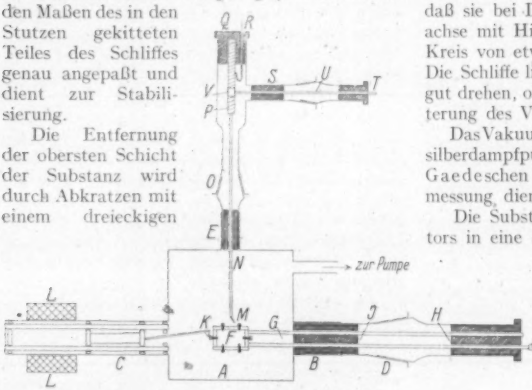


Fig. 1.

Die Stromabnahme an der Oberfläche der Substanz erfolgt durch eine Platinspitze (*M*) von von 1,5 mm Durchmesser und etwa 6 mm Länge. Sie ist vorne abgerundet und poliert und an einer Messingstange (*N*) befestigt. Am oberen Teil derselben, der weit in das mit dem Schliff (*O*) aufgesetzte Glasrohr hineinreicht, ist eine Zahnstange (*P*) angelötet. Das freie Ende derselben bewegt sich in einem entsprechenden Ausschnitt eines Hartgummistopfens (*Q*), der als Führung dient und gleichzeitig nach außen hin abschließt. Eine Kupferlitze verbindet die Zahnstange mit einem Messingstift (*R*). Derselbe führt durch den Stopfen (*Q*) nach außen und stellt die Stromzuführung dar. In gleicher Höhe etwa mit der Mitte der Zahnstange ist ein zweites Glasrohr (*S*) angeschmolzen. Auch dieses endet in einem Normalschliff. Der abnehmbare Teil desselben wird durch einen Hartgummistopfen (*T*) nach außen hin abgeschlossen. Durch eine Durchbohrung führt ein Messingstab (*U*) nach innen. Er trägt an seinem Ende ein kleines Zahnrad (*V*), das in die Zahnstange eingreift, so daß durch Drehen des horizontalen Schliffes die Spitze gehoben und gesenkt werden kann. Die Hartgummizylinder dienen zur Stabilisierung bzw. Führung.

Um bei den Messungen eine Reihe von verschiedenen Stellen der Oberfläche erfassen zu können, ist die Platinspitze nicht gerade, sondern schief auf die Messingstange aufgesetzt, so daß sie bei Drehung derselben um die Längsachse mit Hilfe des Schliffes (*O*) einen kleinen Kreis von etwa 5 mm Durchmesser beschreibt. Die Schliffe ließen sich selbst bei Hochvakuum gut drehen, ohne daß hierdurch eine Verschlechterung des Vakuums eintrat.

Das Vakuum wird mit einer vierstufigen Quecksilberdampfpumpe, das Vorvakuum mit einer Gaedeschen Kapselpumpe erzeugt. Zur Druckmessung dient ein McLeodsches Manometer.

Die Substanz wurde an Stelle eines Detektors in eine auf den Münsterschen Sender abgestimmte Empfangsanlage geschaltet. Zur Erzielung größerer Lautstärken wurde der Strom in bekannter Weise über einen dreistufigen Verstärker geführt. Durch eine Quecksilberwippe konnte der Detektor auch in einen Gleichstromkreis geschaltet werden.

Herstellung des Untersuchungsmaterials.

Das bei den Versuchen verwendete Material wurde durch zweimalige Sublimation eines von Kahlbaum in Pulverform bezogenen *PbS* (pro analysi) hergestellt[1]). Dabei wurde in gleicher Weise wie bei Vrede (2) verfahren. Als Produkt ergab sich nach der ersten Sublimation ein grobkristalliner Zylinder von hellgrauer Farbe. Die Kristalle waren radial angeordnet. Im obersten Teil der umhüllenden Porzellanröhre wurde das Material immer dunkler und ging schließlich in einen schwarzen, rußartigen Beschlag an den Wänden über. Es sind dies wahrscheinlich Verunreinigungen, die früher als das *PbS* sublimieren. Die Rückstände auf dem Boden des Rohres waren nur sehr gering.

Die erwähnten Verunreinigungen wurden entfernt und der Rest ein zweites Mal sublimiert. Das Produkt hatte wieder das gleiche Aussehen. Die Verunreinigungen waren diesmal jedoch erheblich geringer. Der Beschlag an den Wänden oberhalb des sublimierten Materials war ebenfalls von hellgrauer Farbe.

1) Herrn Dr. F. Durau, der die Sublimation für mich durchführte, darf ich auch an dieser Stelle für seine liebenswürdige Unterstützung meinen herzlichsten Dank aussprechen.

Versuchsergebnisse.

Zuerst wurde in der beschriebenen Weise das noch nicht behandelte zweimal sublimierte Bleisulfid in Zimmerluft bei normalem Druck untersucht. Sowohl das von Vrede übernommene als auch das frisch sublimierte Material zeigten dabei eine Gleichrichterwirkung, die der eines zum Vergleich verwendeten *PbS*-Detektors von Telefunken zum mindesten gleichkam. Da die beiden Materialien sich auch bei den weiteren Versuchen im wesentlichen als gleichwertig erwiesen, wird im folgenden die Herkunft nicht erwähnt werden.

Es wurde zunächst versucht, durch Evakuieren — die Drucke lagen, wenn nicht anders angegeben, immer unter 10^{-2} mm *Hg* — die Gleichrichterwirkung zu beeinflussen. Die nach mehreren Stunden vorgenommene Untersuchung ergab zwar eine merkliche Verschlechterung, ein völliges Verschwinden wurde jedoch nicht erreicht. Erst nachdem im Vakuum die oberste Schicht der Substanz durch Schaben entfernt worden war, konnte an keiner Stelle mehr ein Empfang festgestellt werden.

Es sollte nun versucht werden, das *PbS* wieder aktiv zu machen, um festzustellen, wodurch die beobachtete Detektorwirkung hervorgerufen worden war. Zu dem Zweck wurde der Einfluß der Gase H_2, O_2, CO_2 und N_2 untersucht, und zwar zuerst der des Wasserstoffs.

Derselbe wurde in bekannter Weise entwickelt und zur Reinigung von etwa bei der Entwicklung aufgenommener Säure und zum Trocknen durch Kalilauge und Phosphorpentoxyd geleitet. Das Gas strömte dann in die Zelle ein, und zwar sehr langsam, damit die Reinigung möglichst vollständig war. Bei einem Druck von 600 mm *Hg* wurde die Zuführung unterbrochen und sofort und nach 7 Stunden die Messungen vorgenommen. Es ergab sich eine ganz schwache Detektorwirkung, die jedoch gegenüber der ursprünglichen so gering war, daß der Wasserstoff nicht allein für das Auftreten derselben verantwortlich gemacht werden konnte. Im Vakuum wurde das *PbS* wieder inaktiv.

Die nächsten Versuche beschäftigten sich mit dem Einfluß der Kohlensäure. Sie wurde im Kippschen Apparat in bekannter Weise entwickelt und mit Hilfe von P_2O_5 in mehreren Waschflaschen sorgfältig getrocknet. Die Untersuchung erfolgte bei Atmosphärendruck. Das Ergebnis war das gleiche wie bei Wasserstoff. Auch hier verschwand im Vakuum die Gleichrichterwirkung wieder vollständig.

Hierauf wurde Luft eingelassen, die durch P_2O_5 und Kalilauge sorgfältig von H_2O-Dämpfen und CO_2 gereinigt worden war. Es wurde bei 500 mm *Hg* und 760 mm *Hg* untersucht. In beiden Fällen war das Ergebnis das gleiche wie bei den anderen Gasen. Selbst nach 62tägigem Einwirken dieses Gasgemisches war die Detektorwirkung nicht stärker, als die durch den Einfluß der vorher untersuchten Gase hervorgerufene. Sie verschwand wieder unter dem Einfluß eines Vakuums.

Anschließend wurden noch einige Versuche über die Veränderung bei gemeinsamem Einwirken dieser Gase gemacht. Zu diesem Zweck wurde (kohlensäurehaltige) Luft eingeleitet, die mit P_2O_5 getrocknet worden war. Die Messungen wurden bei Atmosphärendruck vorgenommen. Die früheren Ergebnisse wurden bestätigt.

Bei allen vorstehenden Untersuchungen war zu beobachten, daß der Kontakt bei Empfang in viel stärkerem Maße gegen Erschütterungen empfindlich war als ursprünglich vor der Behandlung.

In die Zelle wurde jetzt Luft eingeleitet, die vorher durch eine Waschflasche mit destilliertem Wasser strömte, so daß sie mit Wasserdampf gesättigt war. In dieser Atmosphäre zeigte Bleisulfid eine Gleichrichterwirkung, die fast der des Vergleichsdetektors entsprach. Es wurde hier auch bei verschiedenen Drucken untersucht. Die beobachtete Detektorwirkung stieg mit wachsendem Druck und erreichte bei 180 mm *Hg* schließlich einen Höchstwert, der später auch bei längerem Einwirken nicht mehr übertroffen wurde.

Diese Beobachtungen wurden bestätigt durch Untersuchung des Einflusses von Zimmerluft. Das Bleisulfid wurde aus der Apparatur herausgenommen und vor Staub geschützt mehrere Stunden an der Luft aufbewahrt. Es ergab sich auch hier stets eine gute Gleichrichterwirkung. Im Vakuum wurde das Bleisulfid in allen Fällen wieder inaktiv. Die Empfindlichkeit des Kontaktes bei Empfang gegen Erschütterungen war hier erheblich geringer als bei den Untersuchungen mit Gasen und entsprach etwa der bei dem nichtbehandelten zweimal sublimierten Bleisulfid.

Endlich wurde noch der Einfluß von Schwefelwasserstoff untersucht. Die Versuche ergaben nicht die geringste Veränderung. Das Bleisulfid war nach der Behandlung ebenso inaktiv wie vorher.

Zusammenfassend ist über die Ergebnisse der vorstehenden Untersuchungen zu sagen:

Die trockenen Gase Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff und Kohlensäure rufen an inaktivem, doppelt sublimiertem *PbS* eine schwache Detektorwirkung hervor.[1]) Trockener Schwefelwasserstoff hat überhaupt keinen Einfluß. Dagegen bewirkt

1) Ob dieselbe tatsächlich von diesen Gasen oder vielmehr von Wasser- bzw. Kittdämpfen herrührt, die von den Wandungen der Zelle sich losgelöst und sich auf das *PbS* niedergeschlagen haben, muß vorläufig unentschieden bleiben.

Wasserdampf einen starken Effekt, der dem ursprünglichen gleichkommt. In allen Fällen verschwindet die Veränderung im Vakuum wieder vollständig.

Damit war die Frage nach der Ursache für das Auftreten einer Gleichrichterwirkung am zweimal sublimierten Bleisulfid beantwortet. Zur Klärung der Hauptfrage nach dem Aufbau der Sperrschicht erschien es wesentlich, festzustellen, ob eine ähnliche Wirkung auch durch die Dämpfe anderer isolierender oder schlechtleitender Substanzen hervorgerufen werden kann. In Anlehnung an Beobachtungen von Leo (5) in bezug auf den Einfluß spurenweiser Verunreinigungen durch Benzin, Fette oder Alkohol auf die Ausbildung von Oberflächenladungen wurden drei organische Flüssigkeiten untersucht, nämlich Benzol, Azeton und Methanol. Es wurden gerade diese Stoffe gewählt, um einen vielleicht vorhandenen Unterschied festzustellen zwischen Substanzen, die Dipole und solchen, die keine sind. Debye (6) gibt für die betreffenden Stoffe die Dipolmomente wie folgt an:

Benzol	0,00	10^{18} e. s. E.
Azeton	2,63–2,97	10^{18} e. s. E.
Methanol	1,73	10^{18} e. s. E.
Wasser	1,7–1,87	10^{18} e. s. E.

In allen drei Fällen wurde bei den Untersuchungen gleichmäßig vorgegangen. Die Substanzen – von Kahlbaum bezogen mit dem Vermerk „reinst" – wurden in einer luftdicht verschlossenen Flasche mindestens 30 Stunden über Phosphorpentoxyd aufbewahrt, um ihnen möglichst alle Feuchtigkeit zu entziehen. Da zwischen Azeton und Phósphorpentoxyd eine Reaktion eintrat, die sich im Auftreten einer braunen Färbung zeigte, wurde in diesem Fall mit Chlorkalzium getrocknet. Dann wurde vorher sorgfältig mit P_2O_5 getrocknete Luft langsam durch die Flüssigkeit geleitet, so daß sie mit den betreffenden Dämpfen gesättigt war.

Die Ergebnisse waren in allen Fällen die gleichen. Alle Dämpfe riefen eine starke Detektorwirkung hervor, die der durch Wasserdampf erzielten und der ursprünglichen gleichkam. Auch hier wurde in allen Fällen bei verschiedenen Drucken gemessen. Es zeigte sich das gleiche Verhalten wie bei Wasser. Die Gleichrichterwirkung erreichte bei einem bestimmten Druck einen Höchstwert, der später nicht mehr überschritten wurde. Bei Benzol wurde derselbe bei 290 mm *Hg*, bei Azeton bei 400 mm *Hg* und bei Methanol bei 450 mm *Hg* erreicht. Auch im Vakuum verhielt sich das *PbS* in allen drei Fällen gleich. Die Gleichrichterwirkung wurde stark, etwa auf ein Viertel des Anfangswertes herabgesetzt. Vollständig inaktiv wurde das Bleisulfid aber erst, nachdem die Oberfläche durch Schaben im Vakuum entfernt worden war. Die Empfindlichkeit des Kontaktes gegen Erschütterungen im aktiven Zustand war hier die gleiche wie bei den Versuchen mit Wasser.

Zusammenfassend können wir sagen, daß die Dämpfe von Benzol, Azeton und Methanol eine gleich starke Wirkung wie der Wasserdampf hervorrufen. Im Vakuum tritt wohl eine wesentliche Verschlechterung des Effektes ein, er verschwindet jedoch erst, nachdem die Oberfläche im Vakuum entfernt worden ist.

Besprechung der Versuchsergebnisse.

Die Versuche haben ergeben, daß das zweimal sublimierte Bleisulfid im Vakuum oder nach Entfernung der obersten Schicht durch Schaben keine Detektorwirkung mehr zeigt. Dieses Verhalten steht im Einklang mit den Ergebnissen früherer Untersuchungen, wonach die Gleichrichterwirkung auf das Vorhandensein einer Schicht an der Oberfläche des Bleisulfids, einer Sperrschicht, zurückzuführen und nicht eine Eigenschaft der reinen Substanz ist.

In Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff und Kohlensäure wurde das inaktive Bleisulfid schwach und in den Dämpfen von Benzol, Azeton, Methanol und Wasser stark gleichrichtend. Nach unseren heutigen Anschauungen muß sich also unter dem Einfluß dieser Stoffe eine Sperrschicht gebildet haben, und zwar, wie aus der Beseitigung der Gleichrichterwirkung durch Abschaben zu schließen ist, an der Oberfläche des Halbleiters.

Die Frage nach der Art dieses Bildungsvorganges ist von Bedeutung. Es ergeben sich zwei Möglichkeiten, zwischen denen auf Grund der Versuchsergebnisse zu entscheiden ist:

1. Die Sperrschicht ist das Produkt einer chemischen Reaktion zwischen dem Bleisulfid und den genannten Stoffen.
2. Die Sperrschicht baut sich unmittelbar aus den genannten Stoffen auf, die an der Oberfläche des Bleisulfids adsorbiert werden.

Abgesehen von der chemischen Unempfindlichkeit des Bleisulfids gegenüber den untersuchten Substanzen spricht gegen die erste Annahme vor allen Dingen, daß die Gleichrichterwirkung in allen Fällen im Vakuum wieder verschwand oder doch wenigstens stark herabgesetzt wurde. Dieses Verhalten ist nur zu erklären, wenn man die Bildung der Sperrschicht auf Adsorptionsvorgänge zurückführt. Der Widerspruch, der sich daraus scheinbar ergibt, daß bei den Versuchen mit Benzol, Azeton und Methanol der Effekt im Vakuum nicht vollständig verschwand, findet folgendermaßen seine

Aufklärung: Die verwendete Apparatur enthielt an den Kittstellen Harze, die an und für sich sehr schwer verdampfen. In den verwendeten organischen Substanzen sind sie aber löslich. Sie reichern sich infolgedessen an der auf der Oberfläche des Bleisulfids adsorbierten Benzol- usw. Schicht an und haften hier sehr fest, so daß sie durch Evakuieren nur unvollständig zu entfernen sind. Diese Rückstände können dann wie eine Sperrschicht wirken[1]).

Nach dem oben Gesagten ist die zweite Annahme die richtige.

Die an einem Körper adsorbierte Gasmenge ist abhängig vom Druck. Es ist also anzunehmen, daß die Dicke der Sperrschicht mit wachsendem Druck zunimmt. Andererseits ist es selbstverständlich, daß bei zu starker Annäherung der Elektroden die Sperrschicht durchschlagen oder von der Platinspitze durchstoßen wird. In diesem Falle erhalten wir normale Leitfähigkeit. Die adsorbierenden Stellen an der Oberfläche des Bleisulfids sind sicher nicht alle gleichwertig, so daß die Sperrschicht bei einem bestimmten Druck an verschiedenen Stellen verschieden gut ausgebildet sein wird. Je niedriger der Druck ist, desto zahlreicher sind also die Stellen, wo sie nur ungenügend ausgebildet ist, und um so häufiger werden wir Durchschlagen und normale Leitfähigkeit beobachten. Das Verhältnis der ansprechenden zu den nicht ansprechenden Stellen wird sich verschlechtern. Der Mittelwert, d. h. der Gleichrichtungsfaktor wird niedriger sein.

Tatsächlich wurde bei H_2O und den organischen Substanzen eine derartige Abhängigkeit vom Druck beobachtet. Bei den Gasen war die maximale Veränderung der Gleichrichterwirkung so gering, daß hier Beobachtungen in dieser Richtung nicht ausgeführt werden konnten.

Je geringer die Dicke der Sperrschicht ist, desto mehr müssen die Elektroden einander genähert werden, damit Kontakt eintritt. Mit abnehmendem Druck und damit abnehmender Dicke wird die Empfindlichkeit der Anordnung gegen Erschütterungen größer werden, da dann schon unter Umständen eine kleine Verschiebung der Gegenelektrode zur Durchschlagung oder Durchstoßung der Sperrschicht führen kann.

Auch das konnte beobachtet werden. Es zeigte sich bei Messungen während des Auspumpens oder beim Einströmen der Gase, daß, wenn man einen Empfang erhalten wollte, um so vorsichtiger beim Senken der Gegenelektrode verfahren werden mußte, je geringer der Druck war, vorausgesetzt, daß an der betreffenden Stelle überhaupt eine Sperrschicht bestand. Bei sehr niedrigen Drucken konnte selbst bei größter Vorsicht häufig nur ein kurzer, blitzartig aufzuckender Empfang erzielt werden. Dann trat sofort wieder normale Leitfähigkeit ein. In manchen Fällen war die Empfindlichkeit so stark, daß das Fallenlassen eines Bleistiftes ausreichte, den Empfang verschwinden zu lassen.

Die Dicke der Sperrschicht wird, abgesehen vom Druck, auch davon abhängen, in welchem Maße die Substanz von dem Bleisulfid adsorbiert wird. Die Versuche von Durau (7) über die Adsorption von H_2, O_2, N_2 und CO_2 an Stoffen wie Glas- und Silberpulver, $NaCl$ und vakuumgeschmolzenem Elektrolyteisen haben ergeben, daß die genannten Gase nur schwach adsorbiert werden. Die gebundenen Gasmengen reichen nur zu einer teilweisen monomolekularen Bedeckung der Oberfläche der adsorbierenden Substanz aus. Wir werden also in diesen Fällen eine schwache Gleichrichterwirkung und überhaupt die bei geringer Schichtdicke auftretenden Erscheinungen zu erwarten haben. Auf Grund der Ergebnisse Schlüters (8) werden dagegen Wasserdampf, Benzol, Azeton und Methanol in großen Mengen und entsprechend größerer Schichtdicke angelagert. Die Gleichrichterwirkung wird also groß und die Empfindlichkeit des Kontaktes gegen Erschütterungen gering sein. Das steht im Einklang mit den Versuchsergebnissen.

Da die Adsorption unabhängig davon ist, ob die adsorbierte Substanz ein Dipol ist oder nicht, war bei der Detektorwirkung mit Benzol, Azeton, Methanol und Wasser der gleiche Effekt zu erwarten. Dies war tatsächlich der Fall.

Wir dürfen demnach mit Sicherheit schließen, daß es sich bei der Bildung der Sperrschicht in unserem Falle um eine Adsorption der genannten Gase und Dämpfe an der Oberfläche des PbS handelt.

Jetzt wird es auch verständlich, wie so verschiedene Stoffe wie H_2, O_2, N_2, CO_2, H_2O, C_6H_6 (Benzol), CH_3OH (Methanol) und CH_3COCH_3 (Azeton) grundsätzlich die gleiche Wirkung haben können. Es kommt eben nur darauf an, daß sie schlecht leiten und vom Bleisulfid adsorbiert werden. Innerhalb dieser Grenzen erscheint die Wahl des Stoffes willkürlich.

Die Sperrschicht baut sich also im vorliegenden Falle aus einer vom Bleisulfid chemisch verschiedenen Substanz auf. Es bestätigen sich also die von Frenkel und Joffé (9) über den Aufbau dieser Schicht ausgesprochenen Vermutungen. Ohne Zweifel dürfen wir aber auch für alle anderen Detektoren das gleiche annehmen.

Detektorwirkung und Kontaktpotential.

Die vorstehenden Versuche haben ergeben, daß das Vorhandensein einer Sperrschicht die notwendige Voraussetzung für das Auftreten

[1]) Durch neuere Versuche in unserem Institut ist diese Annahme bestätigt worden.

einer Gleichrichterwirkung ist. Sie ergaben jedoch keinen Aufschluß darüber, warum der Strom in der einen Richtung besser geleitet wird als in der anderen. Man könnte vielleicht annehmen, daß das Kontaktpotential des Halbleiters gegenüber der Gegenelektrode in dieser Hinsicht von Einfluß ist.

Zur Klärung dieser Frage wurde das Kontaktpotential zweier gleichrichtender Substanzen, Silizium und Karborund gemessen, die sich in bezug auf die Richtung des gleichgerichteten Stromes unterscheiden. Während das Silizium den Elektronen in Richtung Platinspitze–Silizium den kleineren Widerstand entgegensetzte, war bei Karborund gerade das Gegenteil zu beobachten. In beiden Fällen wurde als Gegenelektrode eine Platinspitze verwendet. War also tatsächlich das Kontaktpotential mitbestimmend für die Gleichrichtung, so mußten die beiden Substanzen in bezug auf Platin oder einen beliebigen anderen Stoff eine verschiedene Potentialdifferenz haben.

Die Messungen[1]) wurden mit einer von Werner (10) verwendeten Apparatur ausgeführt. Es wurde das Kontaktpotential von Silizium und Karborund gegen Palladium gemessen. Die erhaltenen Werte waren innerhalb der Fehlergrenze gleich.

Auf Grund dieser Ergebnisse ist anzunehmen, daß die Kontaktpotentiale von Silizium und Karborund auch gegen Platin dem Betrage und Vorzeichen nach gleich sind. Wenn die beiden Substanzen sich, was die Richtung des gleichgerichteten Stromes anbelangt, trotzdem gerade entgegengesetzt verhalten, so ist daraus zu schließen, daß ein Zusammenhang zwischen Kontaktpotential und Detektorwirkung nicht besteht.

Zusammenfassung.

Es wurden Untersuchungen über den Einfluß der Gase Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff, Kohlensäure und Schwefelwasserstoff sowie der Dämpfe von Wasser, Benzol, Azeton und Methanol auf die Gleichrichterwirkung von zweimal sublimiertem *PbS* gemacht.

Die Gase H_2, O_2, N_2 und CO_2 riefen an inaktivem Bleisulfid eine ganz schwache Detektorwirkung hervor, die im Vakuum (10^{-2} mm *Hg*) wieder verschwand.

Schwefelwasserstoff hatte gar keinen Einfluß.

Die Dämpfe von Wasser, Benzol, Azeton und Methanol bewirkten das Auftreten einer starken Sperrwirkung, die etwa der eines zum Vergleich untersuchten Bleisulfiddetektors von Telefunken gleichkam. Im Vakuum verschwand beim Wasserdampf der Effekt wieder vollständig, während er bei den anderen Substanzen stark herabgesetzt wurde.

Die Versuche beweisen, daß für das Auftreten einer Gleichrichterwirkung am zweimal sublimierten *PbS* das Vorhandensein einer Fremdschicht an der Oberfläche des Halbleiters notwendig ist, deren Bildung auf Adsorptionsvorgänge zurückzuführen ist.

Reines *PbS* zeigt keine Sperrwirkung.

Nach den Versuchen erscheint die chemische Natur des Stoffes, aus dem sich die Sperrschicht aufbaut, ohne Einfluß, vorausgesetzt, daß derselbe schlechter leitet als der Halbleiter und von diesem gut adsorbiert wird.

Bei den Bleisulfiddetektoren beruht im allgemeinen die Bildung der Sperrschicht auf Adsorptionsvorgängen. Es ist jedoch möglich, daß chemische Veränderungen an der Oberfläche die gleiche Wirkung wie eine adsorbierte Schicht ausüben können.

Es wurden Versuche über den Zusammenhang von Gleichrichterwirkung und Kontaktpotential gemacht. Es ergab sich, daß ein solcher nicht besteht.

Die experimentellen Untersuchungen der vorliegenden Arbeit wurden unter der Leitung von Herrn Geheimrat Prof. Dr. G. C. Schmidt im Physikalischen Institut der Westfälischen Wilhelms-Universität zu Münster i. W. ausgeführt.

Meinem hochverehrten Lehrer darf ich auch an dieser Stelle für seinen Rat und seine Unterstützung meinen herzlichsten Dank aussprechen. Ebenso danke ich der Piepmeyer-Stiftung für zur Verfügung gestellte Mittel und der Postverwaltung, welche die kostenlose Benutzung des Münsterschen Senders gestattete.

Literaturverzeichnis.

1) F. Trey, Physik. Zeitschr. **26**, 849, 1925.
2) J. Vrede, Physik. Zeitschr. **31**, 323, 1930.
3) G. Siemens und W. Demberg, Zeitschr. f. Phys. **67**, 375, 1931.
4) W. Schottky, R. Störmer und F. Waibel, Zeitschr. f. Hochfrequenztechnik **37**, 162, 175, 1931.
5) W. Leo, Ann. d. Phys. V, **9**, 347, 1931.
6) P. Debye, Polare Molekeln. Leipzig 1929. S. Hirzel.
7) F. Durau, Zeitschr. f. Phys. **37**, 419, 1926; Ann. d. Phys. **87**, 307, 1928; F. Durau und C.-H. Teckentrup, Ann. d. Phys. 12, 927, 1932.
8) H. Schlüter, Zeitschr. f. phys. Chem. A **153**, 68, 1931.
9) J. Frenkel und A. Joffe, Physik. Zeitschr. der Sowjetunion **1**, 60, 1932.
10) J. Werner, Zeitschr. f. Phys. **67**, 207, 1931.

(Eingegangen 24. November 1933.)

1) Für die Ausführung derselben bin ich Herrn Dr. J. Werner zu größtem Dank verpflichtet.

BERICHTE.

Bericht über Fragen der Kernphysik[1]).

Von Theodor Sexl.

Erster Teil.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.
Kapitel I. α- bzw. Protonenprobleme.
A. Streuung der α-Teilchen an schweren Kernen.
§ 1. Wellenmechanische Theorie der normalen α-Streuung.
B. Streuung gleichartiger Teilchen bei kleinen Geschwindigkeiten.
§ 2. Motts Voraussage eines wellenmechanischen Effekts.
§ 3. Experimentelle Bestätigungen der theoretischen Voraussagen.
C. Streuung der α-Teilchen an leichten Kernen. Theorie der anomalen Streuung.
§ 4. Übersicht über die experimentellen Ergebnisse.
§ 5. Theorie der anomalen Streuung.
§ 6. Vergleich mit den Experimenten.
D. α-Emission.
§ 7. Die Geiger-Nuttall-Relation.
§ 8. Theorie der radioaktiven α-Emission.
Literaturverzeichnis.
Kapitel II. β-Probleme.
Kapitel III. γ-Probleme.
Kapitel IV. Kernverwandlung.
Kapitel V. Kernmasse.
(Kapitel II–V folgen im zweiten Teil dieses Berichtes.)

Einleitung.

Auf Grund des zunächst einmal probeweise angewandten Satzes von der Quantelung des Drehimpulses kann man abschätzen, daß die schweren Kernbestandteile (Neutronen, Protonen, α-Teilchen) im Kern Geschwindigkeiten haben müssen, die klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sind. Man wird daher vermuten, daß die Gesetze der nichtrelativistischen Wellenmechanik zur Beschreibung von Kernvorgängen solange ausreichen werden, als die schweren Kernbestandteile allein die wesentliche Rolle spielen. Diese Vermutung bestätigt sich tatsächlich. Wie im Kapitel I ausführlich dargelegt werden wird, gelingt es mit Hilfe eines aus den fundamental wichtigen Versuchen über die anomale Streuung der α-Teilchen an leichten Kernen entwickelten Modells über den Potentialverlauf des Kerns gegenüber einem α-Teilchen (linear abgebrochener Coulombberg) in Verbindung mit der Schrödingerschen Wellengleichung die normale und anomale Streuung sowie das Problem des radioaktiven α-Zerfalls nicht ohne Erfolg zu behandeln. Diese Tatsache hat ihren tieferen Grund darin, daß die genannten Theorien keine Voraussetzungen über die Natur der Anziehungskräfte, die sich bei kleinen Abständen vom Kern über das Coulombsche Abstoßungspotential überlagern, zu machen brauchen. Der Vorgang der anomalen Streuung und der α-Zerfall spielt sich sozusagen an der Peripherie des Kerns ab. Man braucht nur zu wissen, daß das Potential „außerhalb des Kerns" nach dem Coulombschen Gesetz abfällt. Es scheinen also keine prinzipiellen Schwierigkeiten aufzutreten, wenigstens solange man den radioaktiven Zerfall nicht als Mehrkörperproblem behandelt, sondern sich auf das angeführte dreidimensional-statische Modell des Kerns beschränkt. Doch ist klar, daß dieses denkbar einfachste Modell keineswegs für alle Fragen ausreichen wird. So ergeben sich z. B. schon bei der Frage nach den Massendefekten, wenn man sie mit diesem Modell angreifen will, Schwierigkeiten.

Das eigentliche Problem bezüglich der schweren Kernbestandteile ist die Frage nach der Wechselwirkung derselben. Man erwartet eine Lösung dieser Frage von der Theorie (gewöhnlich Quantenelektrodynamik genannt), in der insbesondere auch die begrifflichen Schwierigkeiten, die der heutigen relativistischen Wellenmechanik anhaften, sich auflösen sollen. Bei dem heutigen Stande der Theorie bleibt nichts übrig, als zu versuchen, diese Wechselwirkung rückwärts aus den Experimenten zu berechnen. Ein erster Schritt in dieser Hinsicht wird in § 6 geschildert werden. Die zukünftige Theorie wird gleichzeitig die Berechnung der „Kernradien" und „Kernmulden" ermöglichen müssen, die in die jetzige Theorie als Parameter eingehen und so bestimmt werden, daß eine möglichst gute Übereinstimmung mit der Erfahrung erzielt wird.

1) Der vorliegende Bericht ist im wesentlichen nach experimentellen Gesichtspunkten gegliedert, da nach Ansicht des Referenten derzeit eine systematische Kerntheorie weder vorliegt noch möglich erscheint. Insbesondere sind im I. Kapitel die Fragestellungen der Einfachheit und Anschaulichkeit halber durchweg nach den bezüglichen α-Problemen gegliedert, obwohl natürlich (mit Ausnahme des Zerfalls) alle dargelegten Gesetzmäßigkeiten auch für die analogen Protonenprobleme bei Beachtung der entsprechenden Protonenkonstanten ihre Gültigkeit behalten. Dies gilt nicht nur für die normale Rutherford-Streuung, die Streuung gleichartiger Teilchen (wo übrigens auch ausdrücklich auf die Protonen Bezug genommen wird), sondern auch für die Theorie der anomalen Protonenstreuung, zu der erste experimentelle Ansätze bei G. Schneider, Die Naturwissenschaften **19**, 349, 1933, vorliegen.

Kapitel I. α- bzw. Protonenprobleme.

A. Streuung der α-Teilchen an schweren Kernen.

§ 1. Wellenmechanische Theorie der normalen α-Streuung.

Bekanntlich wurden zuerst Streuversuche mit negativen Teilchen ausgeführt zu dem Zwecke, die Anzahl der schwingenden Teilchen im Thomsonschen Atommodell zu bestimmen. Als man diese Streuversuche auch auf α-Strahlen ausdehnte, ergaben sich aber Resultate, die in krassem Widerspruch mit dem Thomsonschen Atommodell standen. Geiger und Marsden (1)[1] fanden nämlich im Jahre 1909 bei ihren Streuversuchen Ablenkungen, die 90° und darüber betrugen. Die Wahrscheinlichkeit, daß diese großen Ablenkungen durch eine Aufsummierung einzelner kleiner Ablenkungen, wie sie die Thomsonsche Theorie voraussetzte, entstehen können, war, wie Rutherford zeigen konnte, viel zu klein. Rutherford sah sich daher zu dem Schlusse gezwungen, daß derart große Ablenkungen durch einen einzigen, besonders günstigen Zusammenstoß zustandekämen, und entwickelte auf dieser Basis sein bekanntes Atommodell. Unter Zugrundelegung der Newtonschen Gleichungen der Mechanik konnte Rutherford (2) auch eine quantitative Theorie der Streuung von α-Strahlen an den Atomkernen entwickeln und seine berühmte Streuformel aufstellen, die durch spätere Versuche in allen Einzelheiten bestätigt werden konnte. Wenn wir jetzt vom Standpunkt der Wellenmechanik aus das gleiche Problem behandeln werden, so ist von vornherein klar, daß die Wellenmechanik keine wesentlich abweichenden Resultate liefern kann, da sie sich sonst in Widerspruch mit dem Experiment setzen würde. In der Tat liefert die Wellenmechanik exakt die Rutherfordsche Streuformel.

Vom wellenmechanischen Standpunkt aus wurde das Problem der Kern-α-Streuung zuerst von Wentzel (3) behandelt, der nach der allgemeinen Bornschen Theorie über den Zusammenstoß materieller Teilchen die entsprechende Schrödinger-Gleichung durch sukzessive Approximationen löst. Wentzel fand, daß bereits die erste Näherung des Bornschen Verfahrens genau die Rutherfordsche Streuformel liefert. Doch kann man leicht einsehen, daß diese Behandlung des Problems unzulässig ist. Führt man nämlich als Längeneinheit die reziproke Wellenzahl des α-Teilchens ein: $kr = r'$ und setzt mit Wentzel am Ort des α-Teilchens ein abgeschirmtes Coulombpotential voraus:

$$V = \frac{2e^2 Z}{r} e^{-\frac{r'}{a}},$$

so kann die Schrödinger-Gleichung des Problems geschrieben werden:

$$\left(\Delta + 1 - \frac{\varkappa}{r'} e^{-\frac{r'}{a}}\right)\psi = 0,$$

wobei $\varkappa = 4e^2 Z/\hbar v = 2\pi r^*/\lambda$, wenn r^* die klassisch gerechnete kürzeste Entfernung vom Kern bedeutet, in die das α-Teilchen bei zentralem Stoß gelangen kann: $r^* = 2e^2 Z/E_\alpha$ und λ = de Broglie-Wellenlänge des α-Teilchens.

Wird jetzt gemäß der Bornschen Methode ψ in eine Reihe entwickelt, deren nulltes Glied die Eigenfunktion der kräftefreien Bewegung ist, so werden die weiteren Reihenglieder eine Entwicklung nach dem Parameter $\varkappa$ darstellen. Eine Beschränkung auf das erste Glied wird also nur dann gestattet sein, wenn $\varkappa = 2\pi r^*/\lambda \ll 1$, was aber bei den üblichen α-Geschwindigkeiten bei keinem Kern der Fall ist. Denn selbst im günstigsten Falle: $v = 2 \cdot 10^9$ cm/sec^{-1}, wird $\varkappa \sim Z/2$, so daß von einer Beschränkung auf die erste Näherung keine Rede sein kann. In der Tat konnte auch Møller (4) durch direkte Ausrechnung der zweiten Näherung des Bornschen Verfahrens zeigen, daß dieselbe im allgemeinen von derselben Größenordnung ist wie die erste, so daß das Wentzelsche Ergebnis nur einem Zufall zugeschrieben werden kann.

Das Problem kann also nur durch eine strenge Integration (5, Gordon) der entsprechenden Schrödinger-Gleichung behandelt werden.

Es befinde sich also im Koordinatenursprung ein ruhender Kern, gegen den in Richtung der positiven x-Achse aus dem negativ Unendlichen her α-Teilchen der Geschwindigkeit v geschossen werden. Bedeutet E_r die Relativenergie und μ die reduzierte Masse, so hat das Problem im Schwerpunktskoordinatensystem drei Freiheitsgrade, und die entsprechende Schrödinger-Gleichung lautet in diesem:

$$\Delta\psi + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E_r - V)\psi = 0. \qquad (1)$$

Das Potential V ist das gegenseitige Potential von α-Teilchen und Kern, das als coulombsch vorausgesetzt wird: $V = \frac{2e^2 Z}{r}$. Gleichung (1) ist nun in Analogie mit der Optik dahin zu interpretieren, daß wir es mit der Beugung der α-Wellen an einem Streuzentrum zu tun haben, wo der Brechungsindex eine Funktion der Entfernung vom streuenden Zentrum ist. Bei einer solchen Beugung wird eine Streuung der α-Wellen nach allen Richtungen stattfinden, und es ist unsere Aufgabe, die Winkelverteilung der Streuintensität zu ermitteln.

Wir haben also eine Lösung zu suchen, die asymptotisch für große Werte der Veränderlichen eine ebene einfallende und eine gestreute Kugelwelle darstellt. Da das Problem in bezug auf die Richtung des einfallenden α-Teilchens rotationssymmetrisch ist, sind die geeigneten

[1] Die fettgedruckten Ziffern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis.

Koordinaten parabolische, und es ist zunächst $\frac{\partial}{\partial\varphi} = 0$ (φ = Winkel um die Rotationsachse). Die Schrödinger-Gleichung (1) lautet dann bei vorausgesetzter scharfer Kenntnis des Eigenwertes E_r

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left(\lambda_1\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\left(\lambda_2\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_2}\right)+k^2\frac{\lambda_1+\lambda_2}{4}\psi-\frac{1}{a_\alpha}\psi=0, \tag{2}$$

wobei k wie üblich die Wellenzahl $=\mu v/\hbar$ des α-Teilchens und $a_\alpha=\hbar^2/2\mu e^2 Z$ bedeutet. Die Separation der Gleichung (2) gelingt durch den Ansatz

$$\psi = \Lambda_1(\lambda_1)\Lambda_2(\lambda_2)$$

und liefert die Gleichungen

$$\frac{d}{d\lambda_1}\left(\lambda_1\frac{d\Lambda_1}{d\lambda_1}\right)+\left(\frac{k^2}{4}\lambda_1-\frac{1}{2a_\alpha}+B\right)\Lambda_1=0$$

$$\frac{d}{d\lambda_2}\left(\lambda_2\frac{d\Lambda_2}{d\lambda_2}\right)+\left(\frac{k^2}{4}\lambda_2-\frac{1}{2a_\alpha}-B\right)\Lambda_2=0.$$

Führen wir die neue unabhängige Veränderliche $\frac{k}{2}\lambda_1$ bzw. $\frac{k}{2}\lambda_2$ ein und bezeichnen sie mit x und schreiben als Repräsentanten für Λ_1, Λ_2 als abhängige Veränderliche y, so sind die beiden Gleichungen vom Typus:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1+\frac{A}{x}\right)y=0,$$

wobei

$$A=\left(-\frac{1}{2a_\alpha}\pm B\right)\frac{2}{k}.$$

Für unser Problem sind nun diejenigen Partikularintegrale dieser Differentialgleichung erforderlich, die asymptotisch für große x eine divergierende und konvergierende Welle darstellen. Sie seien mit $y^{(1)}$ und $y^{(2)}$ bezeichnet. Das ganze transzendente Integral, das eine stehende Welle repräsentiert, wird dann durch

$$\frac{y^{(1)}+y^{(2)}}{2}=G$$

gegeben sein.

Wir haben nun ein solches Produkt von $\Lambda_1\cdot\Lambda_2$ zu bilden, daß für große λ_1, λ_2 das Produkt eine ebene einfallende und eine gestreute Kugelwelle darstellt. Da nun die Welle in der Richtung der positiven x-Achse einfällt und $x=(\lambda_1-\lambda_2)/2$ ist, andererseits die gestreute Welle kugelsymmetrisch sein soll und $r=(\lambda_1+\lambda_2)/2$ ist, müssen wir also das Produkt so wählen, daß Aggregate von der Form exp. $(ik(\lambda_1-\lambda_2)/2)$ und exp. $(ik(\lambda_1+\lambda_2)/2)$ auftreten.

Aus der oben angegebenen Bedeutung der Partikularintegrale ist aber unmittelbar evident, daß die gesuchten Aggregate dann auftreten, wenn für Λ_1 das erste Partikularintegral, also $\Lambda_1^{(1)}(\lambda_1)$ gewählt wird, dagegen für Λ_2 die ganze Transzendente. ψ erhält daher die Form: $\psi=\Lambda_1^{(1)}(\lambda_1)\cdot\Lambda_2(\lambda_2)$. Die strenge Theorie der Partikularintegrale [vgl. (5)] zeigt nun aber, daß $\Lambda_1^{(1)}$ für $\lambda_1=0$, d. h. für die negative x-Achse singulär wird, falls nicht $A=-i$ ist. Dies liefert, wie erforderlich, die Bedingung für die Separationskonstante B. Für B ergibt sich nämlich $B=\frac{1}{2a_\alpha}-i\frac{k}{2}$, und man findet dann, daß für diesen Wert $\Lambda_1^{(1)}$ in exp. $(ik\lambda_1/2)$ ausartet und Λ_2 wird

$$\text{exp.}\,(-ik\lambda_2/2)\cdot L\left(\frac{\varkappa}{2i},\, ik\lambda_2\right),$$

wobei L das ganze transzendente Integral der Laguerreschen Differentialgleichung bedeutet.

Daher ist

$$\psi = e^{i\frac{k}{2}(\lambda_1-\lambda_2)}L\left(\frac{\varkappa}{2i},\, ik\lambda_2\right) \tag{3a}$$

die Lösung unseres Streuproblems. Setzt man hier die in (5) ausführlich berechneten asymptotischen Entwicklungen der Partikularintegrale ein, so erhält man nach einfachen Umformungen, wenn noch λ_1 und λ_2 durch die Koordinaten x und r ausgedrückt werden und der Streuwinkel ϑ' als Winkel zwischen der positiven x-Achse und der Streurichtung eingeführt wird:

$$\psi = e^{\frac{\pi\varkappa}{4}}\Big/\Gamma\left(1+\frac{i\varkappa}{2}\right)\cdot\left\{I+f(\vartheta')\cdot S\right\}, \tag{3}$$

wobei I die einfallende inhomogene Welle des Coulomb-Feldes

$$I=e^{ikr\cos\vartheta'+i\frac{\varkappa}{2}\ln 2kr\sin^2\frac{\vartheta'}{2}}\left(1-\frac{i}{\frac{k}{4\varkappa^2}r\sin^2\frac{\vartheta'}{2}}\right)^{1)}, \tag{3'}$$

S die kugelsymmetrische Streuwelle

$$S=\frac{1}{r}e^{ikr-i\frac{\varkappa}{2}\ln 2kr+2i\arg\Gamma\left(1+i\frac{\varkappa}{2}\right)} \tag{3''}$$

und $f(\vartheta')$ den Winkelfaktor bedeutet:

$$f(\vartheta')=-\frac{r^*}{4\sin^2\frac{\vartheta'}{2}}e^{-i\frac{\varkappa}{2}\ln 2\sin^2\frac{\vartheta'}{2}}. \tag{3'''}$$

1) Aus (3') ist ersichtlich, daß die einfallende Welle selbst im Unendlichen durch das Coulombfeld modifiziert erscheint; dies bedingt nach E. Guth das etwas paradox scheinende Singulärwerden der Rutherfordformel (4) für $\vartheta'=0$.

Die Radialkomponente des winkelabhängigen Viererstroms

$$\frac{1}{r^2}\left|f(\vartheta')\right|^2 = \frac{r^{*2}}{16 r^2 \sin^4\frac{\vartheta'}{2}} = \left(\frac{r^*}{2\lambda_2}\right)^2 \frac{1}{16 r^2} \frac{1}{\sin^4\frac{\vartheta'}{2}} \tag{4}$$

liefert dann genau die Rutherfordsche Streuformel.

Das gewonnene Resultat läßt sich in dem Theorem (5) zusammenfassen: Die in Richtung der positiven x-Achse aus dem negativ Unendlichen her einfallende, am Atomkern gestreute α-Welle der Wellenzahl k wird in parabolischen Koordinaten dargestellt durch

$$\psi = e^{\frac{ik}{2}(\lambda_1-\lambda_2)} L\left(\frac{\varkappa}{2i}, ik\lambda_2\right);$$

ihre Streuintensität asymptotisch durch

$$\left(\frac{r^*}{2\lambda_2}\right)^2.$$

Es sei darauf hingewiesen, daß die reduzierte Masse $\mu = m_\alpha\left(1+\frac{m_\alpha}{M}\right)$ (M = Masse des streuenden Kerns) und die Relativenergie $E_r = E_\alpha\left(1+\frac{m_\alpha}{M}\right)$ nur für sehr schwere Kerne ($m_\alpha \ll M$) mit der Masse und Energie des einfallenden α-Teilchens zusammenfallen; für leichtere Kerne dagegen bewegt sich das Schwerpunktsystem merklich gegenüber dem Beobachtungssystem. Für diesen Fall hat man also in der Streuformel (4) für E_r den soeben angegebenen Ausdruck einzusetzen und den Winkel ϑ' mit Hilfe der Formel

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\sin\vartheta'}{\frac{m_\alpha}{M}+\cos\vartheta'} \tag{5}$$

durch den absoluten Ablenkungswinkel ϑ im System des Beobachters auszudrücken.

Wir sehen also, daß die Wellenmechanik in bezug auf die Streuung von α-Teilchen (und ebenso Protonen) an nackten, schweren Kernen bloß die altbewährte Formel bestätigt. Doch sei auf den prinzipiellen Unterschied der klassischen und quantentheoretischen begrifflichen Auffassung hingewiesen, der darin besteht, daß wir wohl in der klassischen Theorie den kleinsten Abstand vom Kern eines mit der Geschwindigkeit v bewegten α-Teilchens angeben können, während in der Quantentheorie die gleichzeitige Bestimmung des kürzesten Kernabstandes und der Geschwindigkeit v nicht möglich ist. Außerdem sind quantenmechanische und klassische Streuformel, wie aus der obigen Ableitung hervorgeht (Verwendung asymptotischer Näherungen für große $k\lambda_2$), strenge nur so lange äquivalent, als die Beobachtung der gestreuten Teilchen auf Gebiete beschränkt wird, deren Entfernung vom Kern groß ist gegenüber der Wellenlänge der α-Teilchen. In Entfernungen von der Größenordnung der Wellenlänge hingegen treten Interferenzen zwischen einfallender und gestreuter Welle auf, die eine exakte Unterscheidung zwischen einfallenden und gestreuten Teilchen illusorisch machen.

Auf die vollkommene Bestätigung der in der Rutherfordschen Formel enthaltenen quantitativen Aussagen in bezug auf Proportionalität der Streuintensität 1. mit $\operatorname{cosec}^4\vartheta'/2$, 2. mit Z^2 3. mit $1/E^2$ oder $1/v^4$ durch Geiger und Marsden (6) sei nur hingewiesen. Ebenso darauf, daß bekanntlich Chadwick (7) auf der Basis der Rutherfordschen Formel eine direkte Bestimmung der Kernladungszahl für *Cu*, *Ag* und *Pt* durchführen konnte.

Durch die völlige Bestätigung der Rutherfordschen Formel ist gleichzeitig der Beweis erbracht, daß die Abstoßung des α-Teilchens durch schwere Kerne tatsächlich gemäß dem Coulombschen Elementargesetz erfolgt. Und zwar ist dieser Beweis auf Grund der Streuversuche noch für einen Abstand vom Kernmittelpunkt von etwa $2 \cdot 10^{-12}$ cm erbracht, da bei den Versuchen von Rutherford und Chadwick (8) $r^*_{\text{Ag}} = 2 \cdot 10^{-12}$ cm betrug. Die Ausdehnung dieser Streuversuche auf die radioaktiven Kerne führte aber zu folgendem merkwürdigem Paradoxon: Unter der Annahme des Coulombschen Abstoßungsgesetzes zwischen α-Teilchen und Kernrest könnte man die Entfernung angeben, in der ein α-Teilchen vor der radioaktiven Emission gesessen haben müßte, wenn es seine ganze Energie der Abstoßung des Kernrestes verdanken würde. Diese Entfernung ist einfach gleich $r^* = 2e^2(Z-2)/E_\alpha$. Der Radius r^* wurde nun auf Grund der klassischen Vorstellungen als minimaler Kernradius angesehen, da, falls das Coulombsche Gesetz bis zu noch kleineren Abständen vom Kern gelten würde, das α-Teilchen nicht genügend Energie besitzen würde, um das Kernpotentialbergmaximum zu überwinden. Die Tatsache, daß das positive α-Teilchen durch den gleichfalls positiven Restkern gebunden werden kann, zwingt nämlich zu der Annahme von anziehenden Kräften für sehr kleine Entfernungen vom Kernmittelpunkt in den radioaktiven Kernen. Rutherford und Chadwick fanden aber bei ihren Streuversuchen an Uran mit *Ra C'* α-Strahlen, daß noch bis zu einer Entfernung von $4 \cdot 10^{-12}$ cm das Coulombsche Gesetz gültig ist, während $r^*_U = 6{,}7 \cdot 10^{-12}$ cm beträgt, ein Resultat, das in der Folge von Chadwick (9) noch erhärtet wurde. Auf die Auflösung dieses für die klassische Theorie unbegreiflichen Paradoxons durch die Wellenmechanik werden wir in § 8,2 einzugehen haben.

B. Streuung gleichartiger Teilchen bei kleinen Geschwindigkeiten.

§ 2. Motts Voraussage eines wellenmechanischen Effekts.

Bei den bisher behandelten Streuversuchen mit α-Teilchen waren immer zu streuendes α-Teilchen und Streumaterial als voneinander völlig verschieden vorausgesetzt. Wählt man jedoch als Streumaterial Helium, so sind die streuenden Kerne selbst wieder α-Teilchen. Dies muß natürlich bei der Berechnung der Streuintensität berücksichtigt werden.

Bleibt man vorerst auf dem Boden der Newtonschen Mechanik, so hat die Überlegung folgendermaßen zu lauten (1): Von den als massen- und ladungsgleich vorausgesetzten Teilchen werde ein Teilchen in der Richtung der positiven x-Achse aus dem negativ Unendlichen her gegen ein gleiches im Koordinatenursprung ruhendes Teilchen herangeschossen. Impuls- und Energiesatz liefern dann die Folgerungen:

1. Die Bewegung findet in der durch die Anfangs- und Endrichtung des stoßenden Teilchens gegebenen Ebene statt.
2. Die Geschwindigkeit des stoßenden Teilchens nach dem Stoß hat den Wert $v\cos\vartheta$, wenn v die Geschwindigkeit vor dem Stoß und ϑ der Ablenkungswinkel ist; die Geschwindigkeit des in Bewegung versetzten Teilchens ist $v\cos\varphi$.
3. Es gilt $\vartheta+\varphi=\pi/2$, d. h. der größtmöglichste Ablenkungswinkel beträgt $\pi/2$.

Führt man jetzt Relativkoordinaten des stoßenden Teilchens gegenüber dem Schwerpunktsystem ein, so gelten in diesem System die der Rutherford-Formel zugrunde liegenden Gesetze der Bewegung um ein festes Zentrum, wobei man in den entsprechenden Gleichungen für die reduzierte Masse den Wert $\mu=m/2$ einzusetzen hat. Die Zahl der um den Winkel ϑ' abgelenkten Teilchen ist also im Relativkoordinatensystem durch die Rutherfordsche Formel gegeben: $\left(\frac{e^2Z^2}{2\mu v^2 r}\right)^2 \operatorname{cosec}^4\frac{\vartheta'}{2}$. Dazu kommt aber infolge der vorausgesetzten völligen Gleichheit der Teilchen noch die Zahl der durch den Stoß in Bewegung versetzten ursprünglich ruhenden Teilchen, die offenbar Stößen entsprechen, bei denen das stoßende Teilchen um den Winkel $\pi-\vartheta'$ abgelenkt wurde und die von den direkt abgelenkten experimentell nicht zu unterscheiden sind. Deren Zahl ist gegeben durch: $\left(\frac{e^2Z^2}{2\mu v^2 r}\right)^2 \operatorname{cosec}^4\frac{\pi-\vartheta'}{2}$. Transformiert man nun von den Relativkoordinaten auf die ursprünglichen Koordinaten zurück, so wird der Ablenkungswinkel in diesen Koordinaten ϑ gerade halb so groß $\vartheta=\vartheta'/2$ (vgl. Formel 5), somit die Gesamtzahl der in den Winkelbereich ϑ bis $\vartheta+d\vartheta$, φ bis $\varphi+d\varphi$ gestreuten Teilchen:

$$\left(\frac{e^2Z^2}{mv^2r}\right)^2\left|\operatorname{cosec}^4\vartheta+\operatorname{cosec}^4\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta\right)\right|2\sin 2\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi. \quad (6)$$

Anders in der Wellenmechanik! (2). Wir haben auszugehen von der auf das Schwerpunktskoordinatensystem bezogenen Schrödinger-Gleichung (1):

$$\Delta\psi+\frac{2\mu}{\hbar^2}(E_r-V)\psi=0, \quad (1')$$

wobei die reduzierte Masse $\mu=m/2$ und $E_r=\frac{\mu v^2}{2}$ anzusetzen ist. Die Lösung der Gleichung (1'), die eine in der x-Richtung einfallende ebene Welle und eine gestreute Kugelwelle repräsentiert, ist uns aus § 1 bekannt. Wir erhalten

$$\psi\sim I+f(\vartheta')\cdot S, \quad (3)$$

wobei die benutzten Symbole dieselbe Bedeutung haben wie in § 1 und ϑ' den Ablenkungswinkel in den Relativkoordinaten bedeutet. Die Streuintensität wäre durch $|f(\vartheta')|^2$ gegeben. Wegen der vorausgesetzten völligen Gleichheit des stoßenden und gestoßenen Teilchens laufen aber in der Richtung der um den Winkel ϑ' abgelenkten stoßenden Teilchen noch die de-Broglie-Wellen, die die beim Stoß in Bewegung versetzten Streuzentren repräsentieren und die von Stößen herrühren, bei denen das α-Teilchen um den Winkel $\pi-\vartheta'$ abgelenkt wurde. Diese de-Broglie-Wellen werden aber interferieren, und da Frequenz und Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen identisch sind, erhält man das Interferenzresultat durch Superposition der Amplituden, also in der Form

$$f(\vartheta')+f(\pi-\vartheta')=-\frac{e^2Z^2}{2\mu v^2 r}\left\{\operatorname{cosec}^2\frac{\vartheta'}{2}\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}\ln 2\sin^2\frac{\vartheta'}{2}}+\operatorname{cosec}^2\frac{\pi-\vartheta'}{2}\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}\ln 2\sin^2\frac{\pi-\vartheta'}{2}}\right\}.$$

Der Teilchenstrom der Streuintensität ist dann

$$|f(\vartheta')+f(\pi-\vartheta')|^2=\left(\frac{e^2Z^2}{2\mu v^2 r}\right)^2\left\{\operatorname{cosec}^4\frac{\vartheta'}{2}+\sec^4\frac{\vartheta'}{2}+2\operatorname{cosec}^2\frac{\vartheta'}{2}\sec^2\frac{\vartheta'}{2}\cos\left(\varkappa\ln\operatorname{tg}\frac{\vartheta'}{2}\right)\right\}.$$

Geht man zum ursprünglichen Koordinatensystem zurück, so folgt aus den gleichen rein kinematischen Betrachtungen wie in der Newtonschen Mechanik, die in der Wellenmechanik unverändert ihre Gültigkeit behalten, daß der Winkel ϑ' zu verdoppeln ist (vgl. Formel 5). Die Zahl der in den Winkelbereich ϑ, $\vartheta+d\vartheta$; φ, $\varphi+d\varphi$ gestreuten Teilchen wird daher

$$\left(\frac{e^2Z^2}{2\mu v^2 r}\right)^2\left\{\operatorname{cosec}^4\vartheta+\sec^4\vartheta+2\operatorname{cosec}^2\vartheta\sec^2\vartheta\cos\left(\varkappa\ln\operatorname{tg}\vartheta\right)\right\}2\sin 2\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Dividiert man noch durch die nach der klassischen Theorie zu erwartende Teilchenzahl (6), so erhält man nach einfacher Umformung

$$1 + 2\,\frac{\operatorname{tg}^2\vartheta}{1+\operatorname{tg}^4\vartheta}\cos(\varkappa \ln \operatorname{tg}\vartheta).$$

Um diesen Faktor unterscheidet sich also die nach der klassischen und die nach der Wellenmechanik zu erwartende Streuung, falls stoßendes und gestoßenes Teilchen gleichartig sind, wie es z. B. bei der Streuung von α-Teilchen in *He* der Fall ist: $\left(\varkappa = \frac{2e^2Z^2}{\hbar v}\right)$.

Die ganzen bisherigen Überlegungen beruhten wesentlich auf der Annahme, daß die zusammenstoßenden Teilchen in allen ihren Eigenschaften identisch wären, so daß eine experimentelle Möglichkeit für die Unterscheidung zwischen stoßenden und gestoßenen Teilchen nicht besteht. Hierbei ist natürlich vorausgesetzt, daß die Teilchen auch keine ausgezeichnete Achse, also keinen Spin besitzen. Besitzen aber stoßendes und gestoßenes Teilchen einen Spin, so ist die oben gegebene Überlegung wesentlich zu modifizieren. Wir müssen zu diesem Zwecke etwas weiter ausholen und werden dann gleichzeitig auch für den oben behandelten Fall, daß die Teilchen keinen Spin besitzen, eine abstraktere Begründung für das mehr anschauliche Argument einer Superposition der Amplituden der de Broglie-Wellen gewinnen.

Bekanntlich wurde das Paulische Äquivalenzverbot, welches besagt, daß bei abgeschlossenen Systemen keine zwei Teilchen sich in identisch denselben Quantenzuständen befinden dürfen, in die alte Quantentheorie als eine rein empirische Tatsache eingeführt, die sich bei der Ordnung komplizierter Spektren und als Aufbauprinzip des periodischen Systems glänzend bewährte. Die neue Wellenmechanik konnte für abgeschlossene Mehrkörperprobleme insofern eine Zurückführung des Prinzips liefern, als sich zeigte, daß die möglichen Zustände in mehrere nichtkombinierende Systeme zerfallen, die durch besondere Symmetrie oder Antisymmetrie der entsprechenden Eigenfunktionen ausgezeichnet sind. Die beiden Extremfälle werden durch vollständige Symmetrie bzw. Antisymmetrie der Eigenfunktionen dargestellt. Diejenigen Zustände, deren Eigenfunktionen antisymmetrisch in sämtlichen auftretenden Koordinaten sind, genügen dem Pauli-Prinzip und sind die in der Natur verwirklichten. Die Statistik dieser antisymmetrischen Eigenfunktionen ist die Fermische (Fall des Metallelektronengases). Im anderen Extremfalle vollständiger Symmetrie würde die Bosesche Statistik Gültigkeit haben (Fall der Lichtquanten). Bei dem hier behandelten Stoßproblem, das einen einfachen Fall eines aperiodischen Systems darstellt, sind jedoch die auftretenden Eigenfunktionen zunächst vollständig entartet. Symmetrische und antisymmetrische Lösung unterscheiden sich durch keine endliche Energiedifferenz, man kann vielmehr für jeden beliebigen Wert der Energie symmetrische und antisymmetrische Eigenfunktionen konstruieren. Die Frage, welche Eigenfunktionen wir zur Beschreibung der Teilchen zugrunde legen müssen, hängt von der für die Teilchen gültigen Statistik ab.

Besitzen also die zusammenstoßenden Teilchen den Spin I, so werden wir bei ihrer Beschreibung bei Gültigkeit der Bose-Statistik die symmetrischen, bei Gültigkeit der Fermi-Statistik die antisymmetrischen Eigenfunktionen zugrundezulegen haben. Da nun bei einer Vertauschung der beiden Teilchen der Faktor S der Lösung (3), der nur von den Relativkoordinaten abhängt, unverändert bleibt, der winkelabhängige Faktor $f(\vartheta')$ jedoch bei Vertauschung der Teilchen in $f(\pi - \vartheta')$ übergeht, erhalten wir als symmetrische Wellenfunktion

$$S\{f(\vartheta') + f(\pi - \vartheta')\} = \mathfrak{S},$$

als antisymmetrische

$$S\{f(\vartheta') - f(\pi - \vartheta')\} = \mathfrak{A}.$$

1. Genügen die Teilchen der Bose-Statistik, so verhält sich, wie hier aus Platzmangel nicht näher begründet werden kann (man vgl. etwa den Bericht von R. de L. Kronig und S. Frisch in dieser Zeitschr. **32**, 457, 1931), das Gewicht der in den Kernmomenten und in den Kernkoordinaten symmetrischen Lösung zu der in den Kernmomenten und in den Kernkoordinaten antisymmetrischen Lösung wie $(I+1)\,(2I+1)$ zu $I\,(I+1)$. Die Wahrscheinlichkeit, eines der beiden Teilchen in der vorgegebenen Streurichtung zu finden, wird daher

$$\frac{(I+1)\,(2I+1)\,|\mathfrak{S}|^2 + I\,(2I+1)\,|\mathfrak{A}|^2}{(2I+1)^2}.$$

Geht man zum ursprünglichen Koordinatensystem zurück, so findet man bei Einsetzung der durch (3‴) gegebenen Werte nach einer einfachen Zwischenrechnung, wenn man gleichzeitig durch die nach der Newtonschen Mechanik zu erwartende Teilchenzahl dividiert:

$$1 + \frac{2}{2I+1}\,\frac{\operatorname{tg}^2\vartheta}{1+\operatorname{tg}^4\vartheta}\cos(\varkappa \ln \operatorname{tg}\vartheta). \qquad (7)$$

2. Genügen aber die Teilchen der Fermi-Statistik, so müssen die antisymmetrischen Eigenfunktionen zugrunde gelegt werden; das Gewicht der in den Kernmomenten antisymmetrischen, in den Kernkoordinaten symmetrischen Lösung ist dann im Verhältnis $I\,(2I+1)$ zu $(I+1)\,(2I+1)$ kleiner als das Gewicht der in den Kernmomenten symmetrischen, in den Kernkoordinaten antisymmetrischen Lösung.

Die Wahrscheinlichkeit, eines der beiden Teilchen in der vorgegebenen Streurichtung zu finden, wird

$$\frac{I(2I+1)|\mathfrak{S}|^2+(I+1)(2I+1)|\mathfrak{A}|^2}{(2I+1)^2}$$

oder bei Einsetzung der entsprechenden Werte und Division durch die nach der Newtonschen Mechanik zu erwartende Teilchenzahl

$$1-\frac{2}{2I+1}\frac{\operatorname{tg}^2\vartheta}{1+\operatorname{tg}^4\vartheta}\cos(\varkappa\ln\operatorname{tg}\vartheta). \quad (8)$$

Unser Resultat läßt sich in dem Theorem (3) zusammenfassen: Untersucht man die Streuung von Teilchen, die nach dem Coulombschen Gesetz aufeinander wirken, für den Fall, daß die zusammenstoßenden Teilchen gleichartig sind und den Spin I besitzen, so sagt die Wellenmechanik voraus, daß sich die nach der Newtonschen Mechanik zu erwartende Teilchenzahl mit dem Faktor

$$1\pm\frac{2}{2I+1}\frac{\operatorname{tg}^2\vartheta}{1+\operatorname{tg}^4\vartheta}\cos(\varkappa\ln\operatorname{tg}\vartheta)$$

multipliziert, wobei das positive Zeichen im Falle der Bose-Statistik, das negative Zeichen im Falle der Fermi-Statistik Gültigkeit hat.

Es ist unmittelbar klar, daß dieses Theorem durch bloße Beobachtung der Streuintensität bei 45°: $1\pm\frac{1}{2I+1}$, Statistik und Spin der Teilchen zu bestimmen gestattet.

§ 3. Experimentelle Bestätigungen der theoretischen Voraussagen.

Die experimentelle Bestätigung dieses von Mott vorausgesagten Effektes erbrachten einerseits Streuungsmessungen von Gerthsen (1) an Protonen, andererseits Streuungsmessungen von Chadwick (2), Blackett und Champion (3) an α-Teilchen. Die entsprechenden Streuungsmessungen für Elektronen sollen hier aus Platzmangel übergangen werden, da überdies die zugrunde liegenden theoretischen Verhältnisse durch den Einfluß der Relativitäts- und Retardierungskorrektionen wesentlich kompliziertere sind.

Für den von Gerthsen untersuchten Fall der Protonen ($I=1/2$, Fermi-Statistik) zeigt Fig. 1 die nach Mott zu erwartende Korrektur der klassischen Streuung, die übrigens in gleicher Weise auch für Elektronen gilt. Gerthsen arbeitete mit durch ein Magnetfeld homogen gemachten H-Strahlen der Geschwindigkeit $2{,}38\cdot10^8$ cm/sec. Der untersuchte Winkelbereich betrug 15–35°. Die gestreuten Teilchen wurden mit einem Geigerschen Spitzenzähler gemessen, der drehbar angeordnet wurde. Unter Verzicht auf Absolutmessungen wurde das Verhältnis der gestreuten Teilchen für je zwei Winkel aufgenommen: 15/20; 20/25; 25/35; 30/35. Die gemessenen Verhältnisse im Vergleich mit der theo-

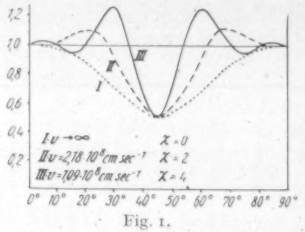


Fig. 1.

retischen Kurve zeigt Fig. 2. Dabei wurde der Punkt e auf den Punkt f der Mottschen Kurve bezogen, während die Punkte a, b, c unmittelbar aufeinander bezogen sind.

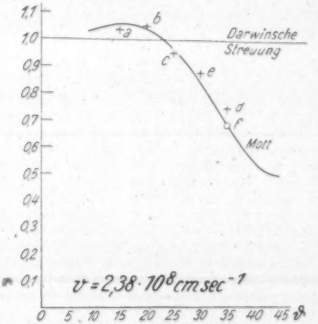


Fig. 2.

Für den Fall der α-Teilchen ($I=0$, Bose-Statistik) zeigt Fig. 3 die nach Mott zu erwartende

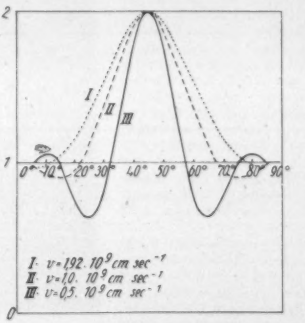


Fig. 3.

Korrektur der klassischen Streuung. Chadwick untersuchte die Streuung von *Po*-α-Teilchen in *He* nach der Szintillationsmethode bei dem festen

Winkel von 45°, wo also die Streuung gegenüber dem klassischen Wert verdoppelt sein sollte, und variabler Geschwindigkeit. Eine graphische Darstellung seiner Beobachtungen zusammen mit älteren Beobachtungswerten an RaC'-α-Teilchen von Rutherford und Chadwick zeigt Fig. 4.

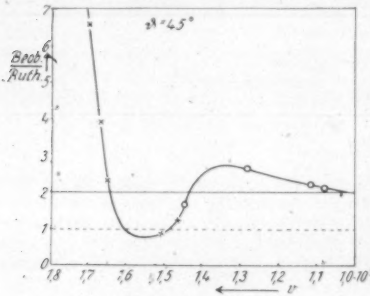


Fig. 4.

Man sieht, daß sich das Verhältnis beobachtete zu theoretischer klassischer Intensität bei kleinen Geschwindigkeiten immer mehr dem von der Mottschen Korrektur geforderten Wert 2 annähert. Auf den mit wachsender Geschwindigkeit vorhandenen Anstieg der Kurve über den Wert 2, den Abfall unter 1 und den nachherigen nochmaligen rapiden Anstieg werden wir in § 4, 2 einzugehen haben. Blackett und Champion untersuchten in sehr mühsamen Wilson-Aufnahmen die Winkelverteilung gestreuter *Po*-α-Teilchen in einem *He*-Sauerstoffgemisch. Der Vorteil dieser Methode gegenüber den Szintillationsbeobachtungen liegt darin, daß man zu wesentlich kleineren Geschwindigkeiten herabgehen kann (bis $1{,}2 \cdot 10^8$ cm/sec). Gemessen werden die Reichweiten und die Winkel der verzweigten Bahnen. Diese Daten werden in ein Diagramm eingetragen, das den Streuwinkel als Ordinate gegen die Reichweite als Abszisse zeigt. Auch hier zeigt sich, daß die von der klassischen Theorie geforderte monotone Abhängigkeit der Zahl der gestreuten Teilchen vom Streuwinkel nicht vorhanden ist, vielmehr in Einklang mit der wellenmechanischen Rechnung typische Beugungsmaxima und -minima auftreten.

Zusammenfassend kann man sagen, daß die drei besprochenen Arbeiten — trotz des an sich geringen Beobachtungsmaterials — die Voraussetzungen der wellenmechanischen Rechnungen bestätigen. Es ist also auf Grund von Streuungsmessungen der Beweis erbracht, daß 1. das Proton den Spin 1/2 besitzt und für Protonen die Fermische Statistik Gültigkeit hat, daß 2. das α-Teilchen spinlos ist und für die α-Teilchen die Bosesche Statistik gilt.

C. Streuung der α-Teilchen an leichten Kernen. Theorie der anomalen Streuung.

§ 4. Übersicht über die experimentellen Ergebnisse.

Die bisherigen Darlegungen über die Streugesetze der α-Strahlen setzten die strenge Gültigkeit des Coulombschen Elementargesetzes auch für sehr kleine Abstände von der als punktförmig angenommenen Ladung des Kerns voraus. Die experimentelle Bestätigung der unter dieser Voraussetzung abgeleiteten Formeln für die Streuung an schweren Kernen zeigt, daß diese Voraussetzung jedenfalls für Kerne höherer Ordnungszahl erfüllt ist. Andererseits zeigten sich schon bei den in § 3 erläuterten Streuversuchen in Helium Abweichungen von der einfachen Theorie. Für die weitere Erforschung der Kernstruktur war es nun von fundamentaler Bedeutung, gerade solche experimentelle Bedingungen zu finden, bei denen die Abweichungen vom Coulombschen Gesetz deutlich hervortreten. Solche Bedingungen sind, klassisch gesprochen, immer dann vorhanden, wenn das α-Teilchen dem Kern möglichst nahekommen kann, also bei Kernen kleiner Ordnungszahl.

1. Streuungsmessungen in Wasserstoff. Impuls- und Energiesatz ergeben, daß die Bewegung in der durch die Anfangs- und Endrichtung des α-Teilchens bestimmten Ebene vor sich geht, daß die Geschwindigkeit des α-Teilchens nach dem Stoß

$$V = \frac{v}{m_a + M}\left[m_a \cos\vartheta \pm \sqrt{M^2 - m_a^2 \sin^2\vartheta}\right],$$

die Geschwindigkeit des in Bewegung versetzten

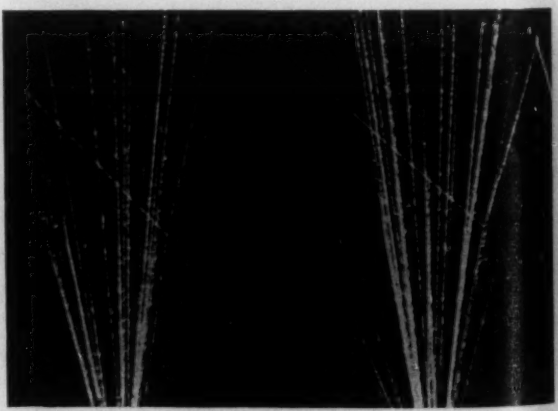


Fig. 5[1]).

[1]) Herrn Prof. Blackett und der Royal Society, London, sei auch an dieser Stelle für die Erlaubnis zur Wiedergabe der Aufnahmen Fig. 5 und Fig. 8 herzlichst gedankt.

Kerns $u = 2v \frac{m_\alpha}{m_\alpha + M} \cos\varphi$ beträgt. Speziell für Wasserstoff ist $m_\alpha = 4M$. Daraus folgt, daß die α-Teilchen höchstens um $14° 29'$ abgelenkt werden können, da für größere Winkel $VM^2 - m_\alpha^2 \sin^2\vartheta$ imaginär würde. Da es gemäß dem doppelten Vorzeichen der Wurzel in v bei kleineren Winkeln zwei Arten von α-Teilchen gibt, würde man bei kleineren Winkeln als $14° 29'$ dreierlei Typen von Teilchen beobachten. Es ist daher experimentell einfacher, nicht die gestreuten α-Teilchen zu beobachten, sondern die bei einem größeren Winkel als $14° 29'$ allein vorhandenen H-Teilchen.

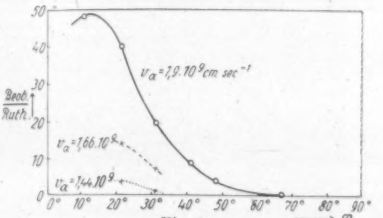


Fig. 6.

Einen ganz direkten Beweis für die Gültigkeit des Impuls- und Energiesatzes beim Zusammenstoß zwischen Protonen und α-Teilchen liefern die stereoskopischen Wilson-Aufnahmen Blacketts (1) Fig. 5 zeigt einen solchen Zusammenstoß. Der Ablenkungswinkel des α-Teilchens betrug $\vartheta = 8° 27'$, der Emissionswinkel des Protons $\varphi = 68°$. Impuls- und Energiesatz ergeben für ϑ und φ folgenden Zusammenhang:

$$\frac{M}{m_\alpha} = \frac{\sin\vartheta}{\sin(2\varphi + \vartheta)}.$$

Fig. 8

Mit den gemessenen Winkeln ergibt sich für dieses Verhältnis 0,253 in vollkommener Übereinstimmung mit dem tatsächlichen Massenverhältnis von 0,252.

Dagegen zeigte sich schon bei den ersten orientierenden Versuchen Rutherfords (2) über die Streuung von α-Teilchen in Wasserstoff, daß die Anzahl der unter einem Winkel φ in Bewegung

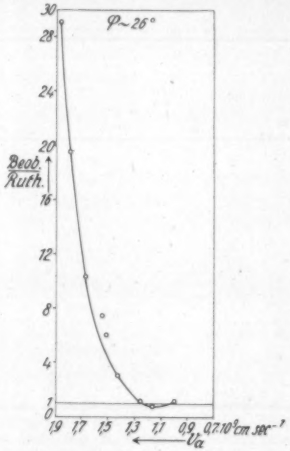


Fig. 7.

versetzten H-Teilchen eine wesentlich andere war als man auf Grund des Coulombschen Gesetzes als Wechselwirkung zwischen α-Teilchen und Proton berechnen würde. Eine Fortführung dieser Versuche durch Chadwick und Bieler (3) bestätigte die letztgenannte Folgerung und führte zu quantitativen Ergebnissen. Chadwick und Bieler beobachteten die Streuung von *RaC'*- und *ThC'*-α-Teilchen in Paraffin. Ihre Resultate veranschaulichen die Fig. 6 und 7. Fig. 6 zeigt die durch die klassische Intensität dividierte beobachtete Zahl der in Bewegung versetzten Protonen als Funktion des Emissionswinkels φ. Fig. 7 gibt für den Winkelbereich zwischen $\varphi = 31° 18'$ und $21° 24'$ die Zahl der beobachteten Teilchen als Funktion der Geschwindigkeit der einfallenden α-Teilchen.

2. Streuungsmessungen in Helium. Auch hier geht die Gültigkeit des Impuls- und Energiesatzes für die Zusammenstöße zwischen α-Teilchen aus den Aufnahmen Blacketts hervor. Fig. 8 zeigt einen solchen Zusammenstoß, wobei der Ablenkungswinkel des α-Teilchens $\vartheta = 38° 34'$ und der Emissionswinkel des in Bewegung versetzten Heliumkerns $\varphi = 50° 53'$ angesetzt wurde, also

$\vartheta + \varphi = 89° 27'$. Mit den gemessenen Winkeln ergibt sich für das Massenverhältnis 0,981 statt 1.

Eine sehr ausführliche Messungsreihe über die Streuung von *RaC'*-α-Teilchen in Helium verdankt man Rutherford und Chadwick (4). Das Beobachtungsmaterial wurde in der Fig. 9 aufgetragen,

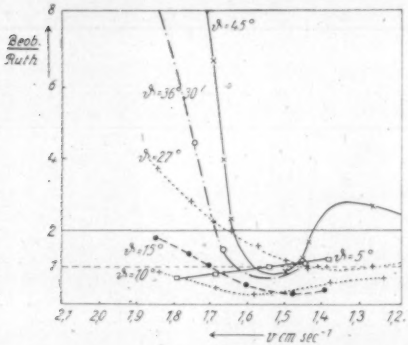


Fig. 9.

die das Verhältnis beobachtete zu der nach dem Coulombschen Gesetz zu erwartende Teilchenzahl als Funktion der Geschwindigkeit bei jeweils konstantem Streuwinkel darstellt. Wenn man das gleiche aus Fig. 9 interpolierte Verhältnis als Funktion des Streuwinkels bei konstanter Geschwindigkeit aufträgt, so zeigt sich, daß gerade im entscheidenden Intervall von 20°–30° Messungen fehlen. Diese Lücke wurde kürzlich ausgefüllt durch Beobachtungen von P. Wright (5), der die Streuung von *RaC* und *Po*-α-Teilchen bei den konstanten Streuwinkeln 10°, 15° und 27° als Funktion der Geschwindigkeit mit Hilfe eines Geiger-Zählers untersuchte. Diese Messungen bestätigen und ergänzen trotz geringerer Differenzen in den Zahlenwerten die Beobachtungen Rutherfords und Chadwicks. So passen gerade die Beobachtungswerte bei 27° ganz gut in die erwähnten Kurven, die deshalb in Fig. 10 wiedergegeben sind. Es kann auf Grund dieser ergänzenden Werte kein Zweifel mehr sein, daß es sich bei diesen Streukurven um typische Beugungskurven handelt.

3. Streuungsmessungen in *Be* ($Z = 4$), *B* ($Z = 5$), *C* ($Z = 6$), *Mg* ($Z = 12$) und *Al* ($Z = 13$). Während für *H* und *He* Blackett durch die erwähnten Wilson-Aufnahmen die Gültigkeit des Impuls- und Energiesatzes bei den Zusammenstößen mit den α-Teilchen direkt beweisen konnte, fehlt nicht nur ein solcher Nachweis bei den jetzt zu besprechenden Elementen, sondern es konnte darüber hinaus mit Sicherheit nachgewiesen werden, daß in einigen Fällen Zertrümmerung des Kerns durch die α-Strahlen, d. h. Emission von *H*-Strahlen (*B*, *Mg*, *Al*) oder von Neutronen (*Be*, *B*) auftritt. Die Lebensgeschichte des α-Teilchens bei einem Zusammenstoß mit den erwähnten Kernen ist unbekannt; es ist möglich, daß es eingefangen wird. Wie dem auch sei, jedenfalls können solche Zusammenstöße durch die im folgenden dargelegte Theorie, die durchaus nur elastische Stöße in Betracht zieht, nicht erfaßt werden. Bei einem Vergleich der theoretischen Ergebnisse mit dem Experiment muß man daher große Vorsicht walten lassen.

Bieler (6), der als erster *Mg* und *Al* untersuchte, beobachtet die Streuung von *RaC*- und *Po*-α-Teilchen in dem Winkelbereich zwischen 18° und 100°. Seine Resultate, die Mittelwerte über relativ große Winkelbereiche darstellen, sind weder sehr genau noch sehr umfangreich. Die Bielerschen

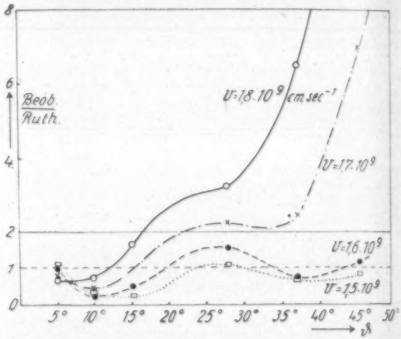


Fig. 10.

Resultate wurden in der Folge von Rutherford und Chadwick (7) bestätigt und erweitert. Diese Autoren untersuchen die Streuung von *RaC'*-α-Teilchen an *Al* bei den festen großen Streuwinkeln von 90° und 135° und variabler Geschwindigkeit der α-Teilchen. Es zeigt sich, daß die Streuung zunächst mit wachsender Geschwindigkeit für beide Winkel unternormal ist, dann bei dem Winkel 135° ein Minimum erreicht, um dann wieder anzusteigen. Die qualitative Ähnlichkeit dieser Streukurven mit

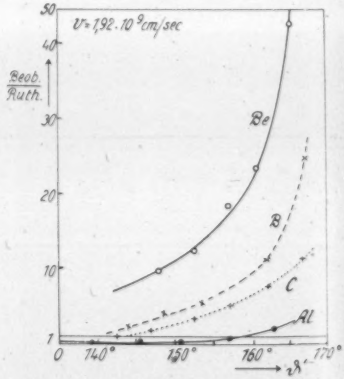


Fig. 11.

denen bei Wasserstoff und Helium läßt vermuten, daß auch für 90° ein solcher Wiederanstieg vorhanden wäre, wenn man nur zu noch größeren Energien übergehen könnte. Die Ergebnisse für *Mg* entsprechen denen für *Al* vollständig.

Etwas ausgedehntere Versuchsreihen wurden von Riezler (8) aufgenommen. Es wurden für die

Elemente *Be*, *B*, *C* und *Al* bei konstant gehaltener Geschwindigkeit ($v = 1{,}92 \cdot 10^9$ cm/sec) der primären α-Teilchen die Winkelverteilungskurven bei sehr enger Unterteilung der Streuwinkel in einem Bereich von 130—160° aufgenommen. Die Resultate sind in Fig. 11 wiedergegeben; dabei sind die Streuwinkel nach Formel (5) auf das Schwerpunktssystem reduziert worden. Aus dieser Figur ist ersichtlich, daß für *Al* die Streuung noch wesentlich unternormal ist, während sie von *C* an übernormal ist, und zwar um so stärker, je kleiner die Kernladungszahl *Z* ist. Dies ist durchaus im Einklang mit den Streuungsmessungen in Helium und Wasserstoff. Für die Elemente *B* und *C* wurden auch Geschwindigkeitskurven bei konstantem Streuwinkel von 160° aufgenommen. Die primäre α-Teilchengeschwindigkeit variierte in einem Bereich von 1,3 bis $1{,}9 \cdot 10^9$ cm/sec. Die so gewonnenen Kurven sind denen an *H* und *He* gänzlich äquivalent.

§ 5. Theorie der anomalen Streuung.

Eine Erklärung der im vorigen Paragraphen dargestellten Versuchsergebnisse wurde zunächst natürlich auf dem Boden der klassischen Mechanik versucht. Und zwar war es zuerst Bieler (1), der seine Versuchsergebnisse an *Al* und *Mg* durch die Annahme zu deuten versuchte, daß bei kleinen Entfernungen vom Kern eine Anziehungskraft ins Spiel käme, die mit einer höheren Potenz der reziproken Entfernung als der zweiten variiere. Die potentielle Energie eines α-Teilchens in der Entfernung r vom Kern wird dann sein: $V = \frac{2e^2Z}{r} - \frac{\beta}{r^n}$ (β = eine Konstante). Bieler setzte $n = 4$ und konnte damit seine Streuversuche gut darstellen. Eine physikalisch-modellmäßige Erklärung für diese Zusatzkraft fehlte jedoch. Pettersson (2) wies darauf hin, daß man einen Exponenten $n = 5$ modellmäßig durch eine Polarisation des Kerns durch das herannahende α-Teilchen deuten könne. Debye und Hardmeier (3) machten die gleiche Bemerkung und arbeiteten überdies eine quantitative Theorie aus, die die Beobachtungen Rutherfords und Chadwicks an *Mg* und *Al* anscheinend befriedigend wiedergeben konnte. Doch war es zweifellos, daß auch der Bielersche Exponent $n = 4$ die gleichen Dienste geleistet hätte. Die Beobachtungen an *H* und *He* blieben unerklärt, da sich die Annahme einer Polarisation des Kerns als unzureichend erwies (4).

Vom heutigen Standpunkt aus ist klar, daß diesen auf Grund der Newtonschen Mechanik unternommenen Deutungsversuchen keine Bedeutung zugebilligt werden kann. Dies erhellt allein schon aus der Tatsache, daß bei dem obigen Potentialansatz charakteristische wellenmechanische Effekte auftreten (gemeint ist vor allem, in laxer Sprache, die mögliche Durchdringung des Potentialberges durch das α-Teilchen), die der Newtonschen Mechanik durchaus wesensfremd sind.

Vom wellenmechanischen Standpunkt aus wurde zunächst von mehreren Seiten (5) versucht, das Problem nach der Bornschen Störungstheorie zu behandeln. Dies war um so naheliegender, als Wentzel auf Grund der gleichen Methode die Rutherfordsche Formel ableiten konnte. Wie jedoch bereits in § 1 dargelegt wurde, erwies sich nachträglich diese Ableitung als unzureichend; das Ergebnis war sozusagen nur durch einen Zufall das richtige geworden. Auf Grund dieser nachträglichen Einsicht war es klar, daß auch die Berechnung der anomalen Streuung nach der Bornschen Störungsmethode unzureichend sein mußte, was auch in der Folge gezeigt werden konnte (6).

Es kann also auch das Problem der anomalen Streuung der α-Teilchen bzw. Protonen nur durch eine strenge Integration (7) der entsprechenden Schrödinger-Gleichung behandelt werden.

1. Ansatz des Problems der anomalen Streuung. Wie in § 1 befinde sich im Koordinatenursprung ein ruhender Kern, gegen den in Richtung der positiven *x*-Achse aus dem negativ Unendlichen her α-Teilchen der Geschwindigkeit v herangeschossen werden. Bedeutet wieder E_r die Relativenergie und μ die reduzierte Masse, so hat das Problem im Schwerpunktskoordinatensystem drei Freiheitsgrade, und die entsprechende Schrödinger-Gleichung lautet in diesem:

$$\Delta\psi + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E_r - V)\psi = 0 \qquad (1'')$$

Gleichung (1″) ist wie in § 1 dahin zu interpretieren, daß wir es mit der Beugung der α-Wellen an einem Streuzentrum zu tun haben, wo der Brechungsindex eine Funktion der Entfernung vom streuenden Zentrum ist. Das Problem ist wiederum die Streuintensität als Funktion des Winkels zu berechnen.

Wir müssen nun geeignete Annahmen über das Potential V zugrundelegen. Die Berechnungen unseres Problems auf Grund der Newtonschen Mechanik legen es nun nahe, zunächst den Bielerschen Potentialansatz zu versuchen, also: $V = \frac{2e^2Z}{r} - \frac{\beta}{r^n}$. Für einen solchen Potentialverlauf gelingt jedoch die strenge Integration nicht. Wir werden daher den steilen Abfall des Potentials innerhalb des Kerns, der durch das

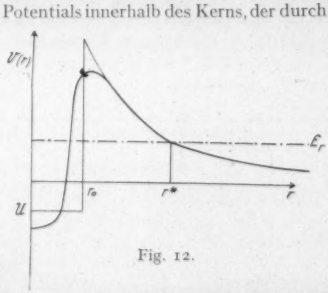


Fig. 12.

Glied β/r^n repräsentiert ist, dadurch schematisieren, daß wir annehmen, es gelte das Coulombsche Potential bis zu einem Grenzradius $r = r_0$ und innerhalb r_0 sei das Potential konstant $= U$ (Fig. 12). Wesentlich bei diesem Potentialansatz

ist, daß sich Innen- und Außenpotential nicht übergreifen. Im übrigen werden wir fallweise betonen, wieweit die gefundenen Resultate von diesem speziellen Ansatz unabhängig sind.

Wir haben nun eine Lösung von (1″) zu suchen, die asymptotisch für große Werte der Veränderlichen eine einfallende ebene und eine gestreute Kugelwelle darstellt. Geht r_0 gegen Null, so ist unser Problem mit dem in § 1 behandelten identisch. Die dort gefundene Lösung lautete: Die in Richtung der positiven x-Achse aus dem negativ Unendlichen her einfallende, am Kern gestreute $\varkappa$-Welle von der Wellenzahl k und der Amplitude 1 wird in parabolischen Koordinaten dargestellt durch

$$\psi_a = e^{-\frac{\pi\varkappa}{4}}\Gamma\left(1+i\frac{\varkappa}{2}\right)e^{ikz}L\left(\frac{\varkappa}{2i}, ik\lambda_2\right).$$

Nun ist zunächst klar, daß bei unserem jetzigen Problem parabolische Koordinaten nicht geeignet sein werden, da ja eine Bedingung wie die obige für $r = r_0$ die Verwendung dieser Koordinaten von vornherein ausschließt. Die richtigen Koordinaten sind vielmehr jetzt einfach Kugelkoordinaten. Da nun die Separation von (1″) in Kugelkoordinaten bei vorausgesetzter Unabhängigkeit vom Polarwinkel φ $\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} = 0\right)$ auf den Lösungsansatz $f_l(kr)P_l(\cos\vartheta')$ führt, ist es naheliegend, eine Entwicklung unserer Lösung in parabolischen Koordinaten nach den zonalen Kugelfunktionen, also

$$\psi_a(\varkappa, \lambda_2) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l(kr)P_l(\cos\vartheta')$$

zu versuchen. Eine solche Entwicklung gelingt tatsächlich, wie strenge bewiesen werden kann, und führt zu dem Ergebnis:

$$e^{-\frac{\pi\varkappa}{4}}\Gamma\left(1+i\frac{\varkappa}{2}\right)e^{ikr\cos\vartheta'}L\left(\frac{\varkappa}{2i}, 2ikr\sin^2\frac{\vartheta'}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty} i^l(2l+1)e^{i\alpha(l,\varkappa)}\chi_l(kr,\varkappa)P_l(\cos\vartheta') \equiv \psi_a. \quad (9)$$

χ_l repräsentiert seiner physikalischen Bedeutung nach eine stehende Welle, die in eine divergierende, genannt $\chi_l^{(1)}$, und eine konvergierende, genannt $\chi_l^{(2)}$, Welle zerlegt werden kann: $\chi_l = \frac{\chi_l^{(1)} + \chi_l^{(2)}}{2}$. Unsere unendliche Summe ψ_a zerlegt sich demgemäß in zwei Teile, von denen der eine mit $\psi_a^{(1)}$, der andere mit $\psi_a^{(2)}$ bezeichnet sei. Diese Zerlegung unserer Lösung in eine Reihe über Kugelfunktionen, welche nach der „Drehimpulsquantenzahl" l fortschreitet, hat eine einfache physikalische Bedeutung. Sie bedeutet nämlich eine Aufteilung des einfallenden Teilchenstroms in eine Reihe von Teilströmen mit vorgegebenem Impulsmoment $\sqrt{l(l+1)}\hbar$ um den Kern, also vorgegebener kürzester Entfernung vom Kern. Die kürzeste Entfernung vom Kern, in die ein Teilchen mit diesem Impulsmoment gelangen kann, ist nämlich durch

$$\frac{2e^2Z}{\mu v^2}\left(1+\sqrt{1+\frac{q^2}{\left(\frac{2e^2Z}{\mu v^2}\right)^2}}\right)$$

mit

$$q = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{\mu v}\hbar = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{k}$$

gegeben. Es wird so der statistische Charakter der wellenmechanischen Auffassung unseres Streuphänomens, welche Auffassung im Gegensatz zur klassischen Theorie Teilchen aller möglichen (natürlich quantisierter) Drehimpulse gleichzeitig in Betracht zieht, besonders deutlich.

Wäre also $r_0 = 0$, so wäre somit auch alles in Kugelkoordinaten bekannt. Die unendliche Summe läßt sich eben aufsummieren und besitzt asymptotisch die gewünschte Gestalt:

$$I + f(\vartheta')S.$$

Die Streuung ist dann die Rutherfordsche.

Ist dagegen $r_0 \neq 0$, so überlagert sich der Rutherfordschen Streuung noch eine Extrastreuung, die natürlich durch eine vom Kern weggehende Welle repräsentiert werden muß. Wegen des Nichtübergreifens von Innen- und Außenpotential bleibt die einfallende Welle J dieselbe wie für $r_0 = 0$, so daß wir also als Lösung für den Außenraum anzusetzen haben:

$$\psi_a + C\psi_a^{(1)},$$

da $\psi^{(1)}$ eine divergierende Welle darstellt.

Für den Innenraum, wo $V = \text{const} = U$, können wir als Lösung ansetzen:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{nk}\sum_{l=0}^{\infty} i^l(2l+1)\sqrt{\frac{nk}{r}}J_{l+\frac{1}{2}}(nkr)P_l(\cos\vartheta') \equiv \psi_i,$$

wobei die Abkürzung

$$\frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar}\sqrt{E_r - U} = \frac{\sqrt{2\mu E_r}}{\hbar}\sqrt{1-\frac{U}{E_r}} = nk$$

verwendet wurde.

$$n = \sqrt{1-\frac{U}{E_r}}$$

ist seiner physikalischen Bedeutung nach ein Brechungsindex. Dieser Ansatz bedeutet, da wir ja die α-Streuung im stationären Betrieb betrachten, für das Innere eine Auffüllung mit stehenden Schwingungen.

2. Erfüllung der Randbedingungen. Die Lösung des Innenraums ist nun mit der Lösung des Außenraums durch gewisse Bedingungen zu verknüpfen. Der wellenmechanische Erhaltungssatz liefert diese Bedingungen in der Form, daß für $r = r_0$ beide Lösungen samt ihren ersten Differentialquotienten stetig ineinander übergehen müssen. Die Übergangsbedingungen lauten also:

$$\left| \begin{array}{l} A\psi_i = \psi_a + C\psi_a^1 \\ A\dfrac{d\psi_i}{dr} = \dfrac{d\psi_a}{dr} + C\dfrac{d\psi_a^1}{dr} \end{array} \right|_{r=r_0} . \tag{10}$$

Setzen wir die unendlichen Summen ein, so erhalten wir mit der Abkürzung

$$\chi_l(kr, 0) = \sqrt{\frac{k}{r}}\, J_{l+1/2}(kr)$$

$$\left| \begin{array}{l} A_l\chi_l(nkr, 0) = \chi_l(kr, \varkappa) + \dfrac{C_l}{2}\chi_l^1(kr, \varkappa) \\ A_l\chi_l'(nkr, 0) = \chi_l'(kr, \varkappa) + \dfrac{C_l}{2}\chi_l^{1\prime}(kr, \varkappa) \end{array} \right|_{r=r_0} . \tag{10'}$$

Dabei wurde ein Koeffizient $e^{-i\sigma(l,\varkappa)}/n$ in die Konstante A_l einbezogen.

$$\left[\sigma(l, \varkappa) \equiv \arg\Gamma\left(1 + l + i\frac{\varkappa}{2}\right)\right].$$

Aus Formel (10') ergibt sich für

$$C_l = 2\,\frac{\begin{vmatrix} \chi_l'(kr_0, \varkappa) & \chi_l'(nkr_0, 0) \\ \chi_l(kr_0, \varkappa) & \chi_l(nkr_0, 0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \chi_l^{1\prime}(kr_0, \varkappa) & \chi_l^{1\prime}(nkr_0, 0) \\ \chi_l^1(kr_0, \varkappa) & \chi_l^1(nkr_0, 0) \end{vmatrix}} . \tag{11}$$

3. Die Streuformel. Unsere gesuchte Außenraumlösung erhält daher die Form:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty} i^l(2l+1)e^{i\sigma(l,\varkappa)}\chi_l(kr, \varkappa)P_l(\cos\vartheta') + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty} i^l(2l+1)e^{i\sigma(l,\varkappa)}C_l\chi_l^1(kr, \varkappa)P_l(\cos\vartheta').$$

Bei Einsetzung der asymptotischen Darstellungen für große Werte der Veränderlichen wird daraus:

$$I + f(\vartheta')\cdot S + \frac{1}{2}\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty} i^l(2l+1)e^{i\sigma(l,\varkappa)}C_l\frac{1}{r}\cdot e^{i\left[kr - \frac{l+1}{2}\pi - \frac{\varkappa}{2}\ln 2kr + \sigma(l,\varkappa)\right]}P_l(\cos\vartheta'); \tag{12'}$$

und daher die gesuchte inhomogene gestreute Kugelwelle

$$S\cdot f(\vartheta')\left\{1 + i\frac{2}{\varkappa}\sin^2\frac{\vartheta'}{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{2}\ln\sin^2\frac{\vartheta'}{2}}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)e^{2i[\sigma(l,\varkappa)-\sigma(0,\varkappa)]}C_lP_l(\cos\vartheta')\right\}.$$

Die Radialkomponente des winkelabhängigen Viererstroms ist dann durch das Quadrat des absoluten Betrages des zuletzt angeschriebenen Ausdrucks gegeben. Dividiert man noch durch die Rutherfordsche Streuintensität, so wird endgültig:

$$\left|\frac{\psi}{\psi_R}\right|^2 = 1 - \frac{4}{\varkappa}\sin^2\frac{\vartheta'}{2}\cdot\Im\left(e^{i\varkappa\ln\sin\frac{\vartheta'}{2}}\sum\right) + \frac{4}{\varkappa^2}\sin^4\frac{\vartheta'}{2}\cdot\left|\sum\right|^2. \tag{12}$$

In dieser Gestalt ist die Streuformel von dem speziellen Potentialansatz des linear abgebrochenen Coulombberges weitgehend unabhängig. Denn ersichtlicherweise geht diese Voraussetzung nur als das Auftreten von speziellen Funktionen $\chi_l(nkr_0, 0)$ in C_l in (12) ein. Insbesondere wird also die Winkelabhängigkeit der anomalen Streuung auch bei beliebigem innerem Potentialverlauf durch (12) dargestellt sein, sofern nur die Voraussetzung des Nichtübergreifens von Innen- und Außenpotential gewahrt bleibt. Die Summation von $\sum$ in geschlossener Form gelingt allerdings auch für den speziellen Fall des linear abgebrochenen Coulombberges nicht. Doch kann man mathematisch streng zeigen, daß C_l stärker Null wird als $(2l+1)\,P_l(\cos\vartheta')$ gegen Unendlich geht, so daß die Konvergenz der Reihe gesichert ist.

Da unsere Lösung $\chi_l + \frac{C_l}{2}\chi_l^1$ in der Form $^1/_2\{\chi_l^1(C_l+1) + \chi_l^2\}$ geschrieben werden kann und, wie leicht zu sehen ist, $|C_l+1|^2 = 1$ ist, können wir statt C_l+1 die Größe e^{2iK_l} einführen und erhalten

$$\frac{1}{2}e^{iK_l}\{e^{iK_l}\chi_l^1 + e^{-iK_l}\chi_l^2\}.$$

Unsere Lösung des Streuproblems ist daher

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty} i^l(2l+1)e^{i[\sigma(l,\varkappa)+K_l]}\frac{1}{2}\{e^{iK_l}\chi_l^1 + e^{-iK_l}\chi_l^2\}P_l(\cos\vartheta');$$

sie geht also aus der für ein reines Coulombfeld gültigen einfach dadurch hervor, daß man $\sigma(l, \varkappa)$ durch $\sigma(l, \varkappa) + K_l$ ersetzt und $\chi_l^{1,2}$ mit entsprechenden Phasenfaktoren versieht.

4. Diskussion der Streuformel.

A. Zur näheren Diskussion von (12) müssen wir nun geeignete Annahmen über die Größenordnungen des Kernradius usw. zugrunde legen. Wir werden zunächst die Annahme machen, daß r_0 so groß ist, daß das Argument unserer Funktionen χ_l, $kr_0 = \frac{\mu v}{\hbar} = 2\pi \frac{r_0}{\lambda}$ bei den üblichen α-Geschwindigkeiten als groß gegen 1 betrachtet werden kann. Dann wird auch der Parameter unserer Funktionen, $\varkappa = \frac{4e^2 Z}{\hbar v} = 2\pi \frac{r^*}{\lambda}$ für nicht zu kleine Z und bei den üblichen α-Geschwindigkeiten als groß gegen 1 betrachtet werden dürfen. Nun sind zwei Fälle streng zu unterscheiden, je nachdem $kr_0 \gtrless \varkappa$, d. h. $\left(\frac{E_r}{E_{\text{pot}}}\right) \gtrless 1$ oder anschaulich, je nachdem die Energie des einfallenden α-Teilchens größer oder kleiner ist als die Höhe des zu überwindenden Potentialberges.

a) Es sei zunächst $\left(\frac{E_r}{E_{\text{pot}}}\right)_{r_0} < 1$. Wir können dann für χ_l asymptotische Darstellungen verwenden, und zwar diejenigen, die für gleichzeitig großes Argument und Parameter gelten, wobei Argument < Parameter. Diese sind für $l = 0$ in (8) ausführlich abgeleitet. Bei ihrer Einsetzung in (11) findet man für C_0 den Wert:

$$C_0 = i\, e^{-\varkappa(2\alpha_0 - \sin 2\alpha_0)} \frac{\operatorname{tg}\alpha_0 \operatorname{tg} nkr_0 - n}{n + \operatorname{tg}\alpha_0 \operatorname{tg} nkr_0 + \frac{i}{2} e^{-\varkappa(2\alpha_0 - \sin 2\alpha_0)}(n - \operatorname{tg}\alpha_0 \operatorname{tg} nkr_0)}, \tag{13}$$

wobei α_0 definiert ist durch

$$\cos^2 \alpha_0 = \frac{kr_0}{\varkappa} = \left(\frac{E_r}{E_{\text{pot}}}\right)_{r_0}.$$

C_0 besteht nun aus zwei Faktoren, nämlich erstens der e-Potenz $e^{-\varkappa(2\alpha_0 - \sin 2\alpha_0)}$, die offenbar den Bereich der anomalen Streuung auf ein sehr enges Geschwindigkeitsintervall beschränkt, da sie sehr rasch mit v veränderlich ist und im wesentlichen die „Durchlässigkeit" des Kernpotentialberges darstellt (vgl. § 8, 4), zweitens dem zuletzt stehenden Quotienten. Dieser Quotient ist das Entscheidende. Man sieht sofort, daß C_0 ausgezeichnete Werte annimmt für den Fall, daß $n + \operatorname{tg}\alpha_0 \operatorname{tg} nkr_0 = 0$. Dann wird nämlich $C_0 = -2$. Die e-Potenz, die den absoluten Wert von C_0 im allgemeinen sehr klein macht, hat sich in diesem Fall herausgekürzt. $|C_0|^2$, die Amplitude der Extrastreuung ist also im allgemeinen von der Größenordnung $e^{-4\varkappa(\alpha_0 - \sin\alpha_0 \cos\alpha_0)}$, im „Resonanzfall" dagegen von der Größenordnung 1.

Die Bedeutung dieser ausgezeichneten Stellen sieht man ein, wenn man die Bedingung etwas anders schreibt:

$$\operatorname{tg} nkr_0 = -\frac{n}{\operatorname{tg}\alpha_0} = -n\sqrt{\frac{E_r}{E_{\text{pot},r_0} - E_r}}. \tag{14}$$

Betrachtet man nun den Fall, daß der Potentialverlauf von r_0 ab nicht coulombsch abfällt, sondern mit dem Werte $2e^2 Z/r_0 = V_0$ ins Unendliche geht (Fig. 13), so hat die zugehörige Schrödinger-Gleichung unter der Voraussetzung $l = 0$ die Lösungen $\psi_i = \sin nkr/r$ für $r \leqq r_0$, die eine stehende Welle darstellt und im Nullpunkt regulär ist, und

$$\psi_a = \frac{1}{r} e^{-\sqrt{\frac{V_0}{E_r} - 1}\, kr}$$

für $r \geqq r_0$, die für $r \to \infty$ verschwindet. Die Stetigkeitsbedingungen an der Stelle r_0 liefern

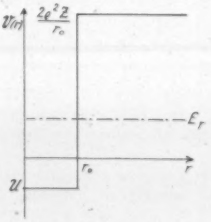


Fig. 13.

dann zwei homogene lineare Gleichungen, die nur dann eine nichtverschwindende Lösung haben, wenn ihre Determinante verschwindet. Diese Determinante liefert aber genau unsere obige Bedingung

$$\operatorname{tg} nkr_0 = -n\sqrt{\frac{E_r}{V_0 - E_r}}.$$

Das α-Teilchen kann sich somit innerhalb der Potentialmulde nur mit Energien aufhalten, die exakt dieser Gleichung genügen. Dies gilt natürlich nur dann, wenn das Potential tatsächlich mit dem konstanten Wert V_0 ins Unendliche geht.

Kehren wir zu unserem Kern zurück, so fällt das Potential vom Werte V_0 mit wachsendem r gegen Null ab. Doch sehen wir, daß auch dann die Stellen ausgezeichnet sind, an denen die Energie des einfallenden α-Teilchens mit einem der für das ins Unendliche ausgedehnten konstanten Potential folgenden stabilen Energieniveau übereinstimmt. Die Niveaus, die diesen ausgezeichneten Energien entsprechen, haben die Bezeichnung „Resonanzniveaus" und „virtuelle Niveaus" erhalten. Die virtuellen Kernniveaus, die uns hier zum ersten Male ganz automatisch entgegentreten, sind nun von fundamentaler Bedeutung nicht nur für die Theorie der anomalen Streuung, sondern auch für die später zu entwickelnden Theorien der radioaktiven α-Emission und der Atomzertrümmerung durch α-Strahlen.

Die Gleichung (14) der virtuellen Niveaus hat nun, wie eine graphische Diskussion (vgl. Fig. 14) lehrt, nur eine endliche Anzahl von Wurzeln, so daß es nur eine endliche Anzahl virtueller Niveaus (zunächst für $l = 0$) gibt. Diese virtuellen Niveaus sind natürlich in ihren Eigenschaften von den echten stabilen Niveaus fundamental verschieden. Der wesentlichste Unterschied ist ihre Unschärfe, die ursächlich mit ihrer Instabilität verknüpft ist. Diese Instabilität besteht darin, daß das α-Teilchen über den Potentialberg hinweg ins Unendliche laufen

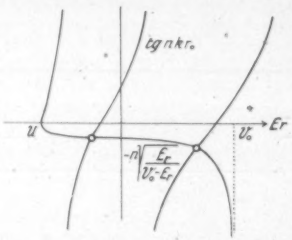


Fig. 14. (Schematisch.)

kann, was noch in § 8,1 ausführlich zur Sprache gelangen soll. Die Wahrscheinlichkeit eines solchen Prozesses bestimmt eben die Unschärfe der virtuellen Niveaus. Diese Unschärfe kann leicht berechnet werden. Dazu bestimmen wir zunächst die Größe A_l aus den Gleichungen (10′). Diese ergibt sich zu

$$A_l = \frac{1}{2}\,\frac{\chi_l^{2}(kr_0,\varkappa)\,\chi_l^{1\prime}(kr_0,\varkappa) - \chi_l^{1}(kr_0,\varkappa)\,\chi_l^{2\prime}(kr_0,\varkappa)}{\chi_l(nkr_0,0)\,\chi_l^{1\prime}(kr_0,\varkappa) - \chi_l^{1}(kr_0,\varkappa)\,\chi_l'(nkr_0,0)}\; n\,e^{i\alpha_l(l,\varkappa)}.$$

Setzt man hier asymptotische Entwicklungen ein, so wird bei Beschränkung auf $l = 0$ das Quadrat des absoluten Betrages von A_0

$$|A_0|^2 = n^2\,\frac{\operatorname{tg}\alpha_0}{\cos^2 nkr_0}\,\frac{e^{-\varkappa(2\alpha_0-\sin 2\alpha_0)}}{(n+\operatorname{tg}\alpha_0\operatorname{tg}nkr_0)^2 + \frac{1}{4}e^{-2\varkappa(2\alpha_0-\sin 2\alpha_0)}(n-\operatorname{tg}\alpha_0\operatorname{tg}nkr_0)^2}.$$

Die Amplitude der stehenden Schwingungen im Kerninnern ist also im allgemeinen von der Größenordnung $e^{-2\varkappa(\alpha_0-\sin\alpha_0\cos\alpha_0)}$. Im Resonanzfall dagegen, wo

$$n + \operatorname{tg}\alpha_0 \operatorname{tg} nkr_0 = 0,$$

wird jedoch

$$|A_0|^2_{\text{Res.}} = n^2\,\frac{e^{+2\varkappa(\alpha_0-\sin\alpha_0\cos\alpha_0)}}{\operatorname{tg}\alpha_0\sin^2 nkr_0},$$

also von der Größenordnung $e^{+2\varkappa(\alpha_0-\sin\alpha_0\cos\alpha_0)}$. Die Halbwertsbreite unserer virtuellen Niveaus ergibt sich nun ganz leicht aus der Forderung

$$\frac{|A_0|^2_{\text{Res.}}}{2} = |A_0|^2_{v_r+\Delta v}.$$

Wenn wir in den Ausdrücken, die mit der kleinen Größe

$$\exp.\{-4\varkappa(\alpha_0-\sin\alpha_0\cos\alpha_0)\}$$

multipliziert sind, für $v_r+\Delta v$ den Resonanzwert v_r schreiben, so erhalten wir nach ganz elementaren Umformungen

$$\Delta v = \hbar\,\frac{1}{\mu r_0}\,\frac{n^2\operatorname{tg}\alpha_0}{n^2+\operatorname{tg}^2\alpha_0}\,e^{-\varkappa(2\alpha_0-\sin 2\alpha_0)}.$$

Da Δv nur den einseitigen Abfall mißt, ist dieser Ausdruck noch mit 2 zu multiplizieren, und wir erhalten für die Unschärfe unserer virtuellen Niveaus

$$\Delta E_r = \hbar\,\frac{2v}{r_0}\,\frac{n^2\operatorname{tg}\alpha_0}{n^2+\operatorname{tg}^2\alpha_0}\,e^{-\varkappa(2\alpha_0-\sin 2\alpha_0)}, \qquad (15)$$

ein Resultat, das noch in § 8, 3 benutzt werden wird.

Qualitativ genau das gleiche gilt auch für den Fall $l \neq 0$. Wir können demgemäß eine Klassifikation der virtuellen Niveaus je nach

dem Werte von l vornehmen, werden also die virtuellen Niveaus für $l=0$ mit S^v, die für $l=1$ mit P^v usw. bezeichnen.

Zusammenfassend haben wir also das Ergebnis: Für den Fall, daß die Energie der einfallenden α-Teilchen kleiner ist als die Höhe des Potentialberges, wird die Streuung der α-Wellen nur in der Umgebung der in endlicher Anzahl vorhandenen virtuellen Niveaus von der Rutherfordschen abweichen.

b) Bisher wurde immer vorausgesetzt: $\left(\frac{E_r}{E_{\text{pot}}}\right)_{r_0} < 1$. Jetzt sei umgekehrt $\left(\frac{E_r}{E_{\text{pot}}}\right)_{r_0} > 1$, d. h. die Energie des α-Teilchens soll größer sein als das Maximum des Kernpotentialberges. Bei Einsetzung der entsprechenden asymptotischen Darstellungen für den Fall, daß Argument > Parameter, erhalten wir dann für C_0 den Wert

$$C_0 = (1 - e^{-2i\beta}) \frac{\operatorname{tg} n k r_0 \operatorname{Tg} \varkappa_0 \operatorname{ctg} \beta - n}{n - i \operatorname{tg} n k r_0 \operatorname{Tg} \varkappa_0}, \quad (13')$$

wobei

$$\beta = \varkappa (\operatorname{Sin} \varkappa_0 \operatorname{Cof} \varkappa_0 - \varkappa_0) + \frac{\pi}{4}$$

und

$$\operatorname{Cof}^2 \varkappa_0 = \left(\frac{E_r}{E_{\text{pot}}}\right)_{r_0} = \frac{k r_0}{\varkappa}$$

bedeutet.

Im Gegensatz zu Fall a) gibt es jetzt, wie auch anschaulich klar ist, keine Resonanzstellen. C_0 nimmt zwar an den Stellen $n + \operatorname{Tg} \varkappa_0 \operatorname{tg} n k r_0 \operatorname{tg} \beta = 0$ den ausgezeichneten Wert -1 an; doch können diese Stellen nicht wie im Unterbergfall als Niveaus aufgefaßt werden, da die zugehörige Breite von derselben Größenordnung wäre wie der Abstand zweier benachbarter von diesen Stellen. Sonstige allgemeine Aussagen können für diesen Fall ohne numerische Berechnungen nicht gemacht werden.

B. Wir müssen uns jetzt von der Voraussetzung befreien, daß das Argument unserer Funktionen χ_l, $k r_0 = \frac{\mu v}{\hbar} r_0$ und der Parameter $\varkappa = \frac{4 e^2 Z}{\hbar v}$ sehr groß gegen 1 ist. Bei der Streuung in H und He, wo sowohl Z als auch r_0 klein sind, können wir dann nicht wie bisher asymptotische Entwicklungen verwenden. Es ist vielmehr notwendig, die Funktionen χ_l direkt in Betracht zu ziehen. Dies ist jedoch mit großen Schwierigkeiten verbunden, da diese Funktionen nicht tabelliert vorliegen wie etwa die Besselschen. Aus diesem Grunde stellen sich einer Ausdehnung der Theorie auf H und He große Schwierigkeiten entgegen [vgl. einen ersten Tabellierungsversuch von χ_0^1 bei H. M. Taylor, Zitat in § 6 (1)].

Eine Besonderheit tritt noch für den Fall des He ein, da dann streuendes Teilchen und streuender Kern gleichartig sind. Analog zu § 2 haben wir dann wegen der Gültigkeit der Bose-Statistik die symmetrisierten Eigenfunktionen zugrunde zu legen. Diese Symmetrisierung erfolgt am einfachsten in der Formel (12'). Man sieht dann sofort, daß wegen

$$P_l(\cos\vartheta) = -P_l[\cos(\pi - \vartheta)]$$

in der unendlichen Summe nur die Glieder mit geradem Index beizubehalten sind. An Stelle von (12) kommt dann

$$\left|\frac{\psi}{\psi_R}\right|^2 = 1 + 2\frac{\operatorname{tg}^2\vartheta}{1+\operatorname{tg}^4\vartheta}\cos(\varkappa \ln \operatorname{tg}\vartheta) - \frac{8}{\varkappa}\frac{\operatorname{tg}^4\vartheta}{1+\operatorname{tg}^4\vartheta}\left|\frac{1}{\sin^2\vartheta}\,\Im\left(e^{i\varkappa \ln \sin\vartheta}\sum_{l=0\,(2)}'\right) + \frac{1}{\cos^2\vartheta}\,\Im\left(e^{i\varkappa \ln\cos\vartheta}\sum_{l=0\,(2)}'\right)\right| + \frac{16}{\varkappa^2}\frac{\operatorname{tg}^4\vartheta}{1+\operatorname{tg}^4\vartheta}\left|\sum_{l=0\,(2)}'\right|^2. \quad (12'')$$

Die beiden ersten Glieder auf der rechten Seite sind identisch mit den in § 2 gewonnenen und rühren also von der Gleichartigkeit der zusammenstoßenden Partikel her, während die zwei letzten Glieder den eigentlichen Effekt der anomalen Streuung liefern.

§ 6. Vergleich mit den Experimenten.

1. Streuung in H und He. Eine ausführliche numerische Berechnung der Streuung in H und He verdankt man H. M. Taylor (1). Beschränkt man sich in den entsprechenden Streuformeln (12) bzw. (12'') auf die nullte Partialwelle $l=0$, so ist bei vorgegebener Geschwindigkeit der einfallenden α-Teilchen der einzige unbekannte Parameter die Größe C_0. Man kann daher zunächst für einen speziellen Winkel die zugehörige Größe C_0 rückwärts aus den experimentellen Daten berechnen und dann mit Hilfe dieses C_0-Wertes die Streuung bei allen anderen Winkeln gewinnen. Die so von Taylor erhaltenen Winkelverteilungskurven sind durchaus mit den experimentellen in Einklang. Wird jetzt ein linear abgebrochenes Coulomb-Feld als Innenpotential vorausgesetzt, so ist es (nach Tabellierung der Funktion χ_0^1 im Intervall $0 < k r_0 < 2{,}25$) möglich, aus den gefundenen C_0-Werten den Radius und die Tiefe der Kernmulde (als wechselseitiges Potential zwischen α-Teilchen und Proton bzw. zwischen zwei α-Teilchen) zu berechnen. Taylor findet so für H: $U = -9{,}6 \cdot 10^{-6}$ erg und $r_0 = 4{,}5 \cdot 10^{-13}$ cm; für He: $U = -24{,}8 \cdot 10^{-6}$ erg und $r_0 = 3{,}5 \cdot 10^{-13}$ cm. Eine einfache graphische Diskussion lehrt, daß für die angegebenen Werte

weder bei H noch bei He virtuelle Niveaus existieren, so daß es sich in beiden Fällen in Einklang mit den aus den angegebenen Daten folgenden Höhen der Bergspitzen (1,06 bzw. $2{,}61 \cdot 10^{-6}$ erg) um eine Überberg- und also keine Resonanzstreuung handelt. Dagegen existiert in beiden Fällen je ein stabiles Niveau bei $-1{,}28$ bzw. $-16 \cdot 10^{-6}$ erg, so daß einerseits ein stabiler Kern von der Masse 5, bestehend aus einem Proton und einem α-Teilchen, andererseits ein stabiler Kern von der Masse 8 (Be 8?), bestehend aus zwei α-Teilchen, existenzmöglich wäre. Doch scheinen sich bei beiden hypothetischen Kernen Schwierigkeiten in bezug auf die Massendefekte zu ergeben.

2. Streuung in Mg und Al. Bei Mg und Al sind die Voraussetzungen des Falles A, § 5: großes Argument und großer Parameter bei Annahme eines geeigneten Kernradius erfüllt. Das Naheliegendste wäre nun, zu versuchen, aus den bei den Zertrümmerungsversuchen an Al von Pose bzw. Chadwick und Constable gemessenen Resonanzniveaus rückwärts den Kernradius und die Tiefe der Kernmulde zu berechnen. Da sich jedoch dieser Weg als nicht gangbar erwies, bleibt nichts anderes übrig, als ein vereinfachtes Modell durchzurechnen, um die Verhältnisse qualitativ überblicken zu können.

Die einfachste Annahme ist nun $r_0 = 5 \cdot 10^{-13}$ cm und $U = 0$. Die graphische Lösung der Eigenwertgleichungen (§ 5, 14) lehrt, daß es, wie schon oben betont, nur eine endliche Anzahl von virtuellen Niveaus gibt, und zwar zwei S-Niveaus, die mit $1\,S^V$ und $2\,S^V$ bezeichnet werden mögen, und je ein P^V-($l = 1$-), ein D^V-($l = 2$-) und ein F^V-($l = 3$-) Niveau. Für $l = 4$ hat die entsprechende Eigenwertgleichung keine Wurzeln mehr. Das anschauliche Bild des Al-Kerns, das sich so ergibt, zeigt

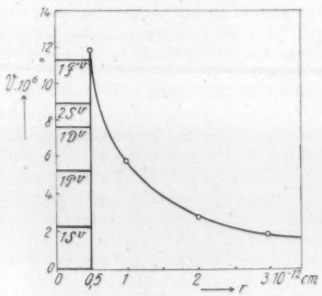


Fig. 15.

Fig. 15. Die Streuung an diesem Modell des Al-Kerns zerfällt nun in die zwei Fälle Aa und Ab, je nachdem die (reduzierte) Energie des einfallenden α-Teilchens kleiner oder größer als die Höhe des Potentialberges $V_0 = 11,9 \cdot 10^{-6}$ erg ist.

Bleibt man zunächst bei dem Fall, daß die Energie des α-Teilchens kleiner ist als V_0, so sind die Voraussetzungen: großes Argument und großer Parameter näherungsweise noch bis zu Geschwindigkeiten $1{,}2 \cdot 10^9$ cm/sec herunter erfüllt ($k\,r_0 = 3{,}8$; $\varkappa = 9{,}5$). In dem Bereich von $v = 1{,}2$ bis $1{,}9 \cdot 10^9$ cm/sec liegt nun, wie ein Blick auf Fig. 15 lehrt, das $2\,S^V$-Niveau neben den $1\,P^V$-, $1\,D^V$- und $1\,F^V$-Niveaus. Da die Niveaus mit höherem l viel schmäler sind als die S-Niveaus und in ihrer Umgebung die Streuungsamplituden viel stärker gedämpft sind, kann man sich zunächst darauf beschränken, die Streuung an dem $2\,S^V$-Niveau zu berechnen, also nur das erste Glied der Kugelfunktionenentwicklung mitzunehmen. Für den genauen Wert der Resonanzgeschwindigkeit des $2\,S^V$-Niveaus wird aber $C_0 = -2$, und man erhält bei Einsetzung in Formel (12)

$$\left|\frac{\psi}{\psi_R}\right|^2 = 1 + \frac{8}{\varkappa}\sin^2\frac{\vartheta'}{2}\sin\left(\varkappa \ln \sin\frac{\vartheta'}{2}\right) + \frac{16}{\varkappa^2}\sin^4\frac{\vartheta'}{2}. \quad (16)$$

Aus (16) folgt, daß die Winkelverteilung der Streuung an der Resonanzstelle von dem Kernradius und der Tiefe der Kernmulde völlig unabhängig ist. Diese Eigenschaft der Winkelverteilung der Resonanzstreuung ist wesentlich unabhängig von dem Modell des linear abgebrochenen Coulombberges. Dem $2\,S^V$-Niveau entspricht der Wert $v = 1{,}651 \cdot 10^9$ cm/sec. Fig. 16 zeigt die nach (16) berechnete Winkelverteilung. Eine weitere Kurve für die Geschwindigkeit $1{,}6 \cdot 10^9$ cm/sec, also für eine Geschwindigkeit ganz in der Nähe der Resonanzgeschwindigkeit, zeigt den großen quantitativen Unterschied der beiden Kurven. Beiden ist aber qualitativ die wellenartige Umschlingung der Geraden 1 gemeinsam. Der Verlauf der Resonanzkurve ist nun durchaus in Übereinstimmung mit der von Riezler an Al aufgenommenen Streukurve (§ 4, Fig. 11). Es wurden ferner die Streukurven bei konstant gehaltenem Winkel (45, 90, 135 und 180°) als Funktion der Geschwindigkeit des einfallenden α-Teilchens berechnet; auch die so erhaltenen Kurven sind mit

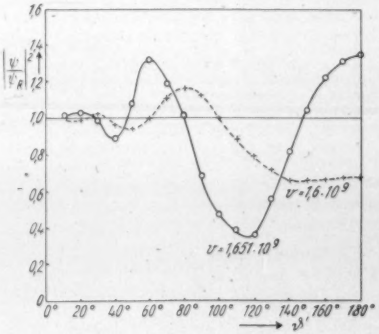


Fig. 16.

den experimentellen Kurven Rutherfords und Chadwicks qualitativ in Einklang.

Für den Fall, daß die Energie des einfallenden α-Teilchens größer ist als die Höhe des Potentialberges wurde (ebenfalls bei Beschränkung auf die nullte Kugelfunktion), bei 180° die Streukurve als Funktion der Geschwindigkeit berechnet. Die so gewonnene Kurve ist durchaus analog zu der von Riezler an C aufgenommenen Kurve, die sich ja ebenfalls auf eine Streuung (bei 160°) bezieht, die einem Übergang vom Gebiet unterhalb der Bergspitze zu dem oberhalb derselben entspricht.

Es ist also eine vollkommene qualitative Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment

vorhanden. Eine weitere Ausgestaltung der numerischen Berechnungen wird einerseits für H und He eine direkte Berechnung der Streukurven, andererseits bei Al insbesondere den genauen Einfluß der höheren Kugelfunktionen und die Überlagerung der einzelnen Resonanzniveaus in Betracht zu ziehen haben.

D. α-Emission.

§ 7. Die Geiger-Nuttall-Relation.

Jedes radioaktive Element besitzt als charakteristische Konstante das Verhältnis zwischen den in einer Sekunde zerfallenden und den noch vorhandenen Atomen, die Zerfallskonstante λ. Eine weitere charakteristische Konstante eines jeden α-strahlenden Elementes ist ferner die Reichweite der von ihm entsendeten α-Strahlen (in Luft bei 15° C, 760 mm Hg). Wie nun Geiger und Nuttall (1) im Jahre 1911 fanden, sind diese beiden charakteristischen Konstanten durch eine einfache Gesetzmäßigkeit verknüpft: die Logarithmen der Zerfallskonstanten sind nahezu lineare Funktionen der Logarithmen der Reichweiten: $^{10}\log \lambda = A + B\,{}^{10}\log R$. Dabei bedeutet B eine universelle Konstante vom Betrage 60, während A für jede der drei Zerfallsreihen einen andern Wert annimmt, z. B. für die U-Ra-Familie den Wert $-41{,}5$, so daß sich drei parallele Gerade bei graphischer Darstellung ergeben. Diese lineare Beziehung hat jedoch nur approximativen Charakter. Es gibt Abweichungen, so insbesondere für $Ac\,X$, dessen Reichweite der Th-, nicht aber der Ac-Reihe entspricht, und für RaC', dessen extrapolierte Reichweite sich um zwei Zehnerpotenzen zu klein ergibt.

Schon bald nach der Aufstellung der Geiger-Nuttall-Relation wurden theoretische Versuche unternommen, diese wichtigste quantitative Beziehung der Radioaktivität aus den damals bekannten Prinzipien der theoretischen Physik herzuleiten. Allen diesen Versuchen kann vom heutigen Standpunkt aus keine Bedeutung zugebilligt werden, da, wie in der analogen Situation bei der anomalen Streuung (vgl. § 5), vorerst noch charakteristische Effekte der neuen Wellenmechanik aufzufinden waren.

§ 8. Theorie der radioaktiven α-Emission.

1. Vorbereitendes über den Durchgang von Teilchen durch Potentialschwellen nach der Wellenmechanik. Es sei ein Potentialverlauf $V(x)$ in der Form der Fig. 17 ge-

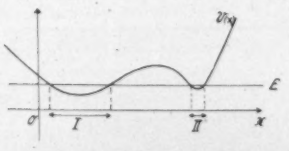


Fig. 17.

geben. Das Energieintegral der Newtonschen Bewegungsgleichungen $p^2/2m + V(x) = E$ liefert dann in den Gebieten mit $E < V(x)$ für p imaginäre Werte, d. h. daß das Teilchen sich nur in Gebieten aufhalten kann, wo $E - V(x) \geqq 0$. In dem Beispiel der Fig. 17 hätte man also zwei voneinander völlig getrennte Bewegungsmöglichkeiten des Teilchens in den Gebieten I und II. Vollführt zu einem gegebenen Zeitmoment das Teilchen seine Bewegung im Gebiete I, so ist es für immerwährende Zeiten an dieses Gebiet gebunden.

Anders in der Wellenmechanik! Die eindeutige Beziehung, die in der klassischen Mechanik gemäß dem obigen Energieintegral zwischen Lagekoordinate und Impuls besteht, geht in der Wellenmechanik verloren und wird bekanntlich durch die Heisenbergsche Unsicherheitsrelation ersetzt. In mehr wellenmechanischer Sprache ausgedrückt, ist durch die etwaige Lokalisierung des Teilchens im Gebiete I entsprechend der Heisenbergschen Unsicherheitsrelation der Impuls unscharf geworden. In den Eigenfunktionen, die das Verhalten des Teilchens beschreiben, werden dann Glieder mit Impulsen bzw. Energien auftreten, deren Energie größer als die Höhe des Potentialberges zwischen I und II ist, so daß es dann auch anschaulich gesprochen gar nicht verwunderlich ist, wenn das Teilchen die Potentialschwelle übersetzt und zu einem gewissen Zeitmoment im Gebiete II gefunden wird, trotzdem es zu Anfang seine Bewegung in I ausgeführt haben mag. In mehr wellenmechanischer Sprache erfüllen von vornherein die ψ-Funktionen den ganzen unendlichen Raum; es gibt immer eine endliche Wahrscheinlichkeit, gemessen durch $|\psi|^2$, dafür, daß sich das Teilchen auch in Gebieten aufhält, die nach klassischen Begriffen dem Teilchen verboten sind, also in unserem Beispiel das Gebiet des Potentialberges zwischen I und II. Es ist also auch die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Gebiet II anzutreffen, von Null verschieden. Der Potentialberg zwischen I und II ist für das Teilchen kein unüberwindliches Hindernis mehr, sondern wird durch eine gewisse „Durchlässigkeit" gekennzeichnet.

In laxer Sprache veranschaulicht sich dieses gänzlich anders geartete Verhalten durch die Heranziehung optischer Analogien; z. B. dringt auch bei der Totalreflexion an einer dünnen, nicht absorbierenden Schicht, deren Dicke von derselben Größenordnung ist wie die Wellenlänge des auffallenden Lichts, ein Teil der auffallenden Welle durch die dünne Schicht in das optisch dichtere Medium ein.

2. Qualitative Erklärung der α-Emission und der Geiger-Nuttall-Relation. Auf Grund der unter 1. dargelegten Ausführungen wird nun die α-Emission unmittelbar verständlich. Denn wie schon wiederholt betont wurde, muß der Potentialverlauf des Kernrestes

gegenüber dem α-Teilchen wie in Fig. 12 angenommen werden, so daß genau das unter 1. behandelte Problem der Überwindung einer Potentialschwelle vorliegt.

Die radioaktive α-Emission hat man sich also folgendermaßen vorzustellen: Im Gegensatz zu den leichten Kernen, wo die virtuellen Niveaus (vgl. § 5) des Kernes im allgemeinen unbesetzt sind, befinden sich bei den radioaktiven Elementen in den virtuellen Niveaus α-Teilchen. Diese virtuellen Niveaus sind instabil. Die Instabilität besteht darin, daß das α-Teilchen über den Potentialberg hinweg ins Unendliche laufen kann, ein Prozeß, dessen anschauliche Möglichkeit ja soeben erläutert wurde.

Auch die Geiger-Nuttall-Relation wird unmittelbar verständlich. Denn je größer die Teilchenenergie im Vergleich zu der Höhe und Breite des Potentialberges wird, desto größer wird die Durchlässigkeit der Schwelle, desto größer ist also auch die Wahrscheinlichkeit, daß das Teilchen den Kern verläßt, um so größer ist also die Zerfallskonstante. Auch das Rutherfordsche Paradoxon (vgl. § 1) löst sich mit einem Schlage, wie einfach der Anblick der Fig. 12 unter Beachtung des Durchdringungsprozesses lehrt.

Diese schöne und einleuchtende Erklärung der α-Emission verdankt man Gamow (1), Gurney und Condon (2). Sie ist im wesentlichen durch die Kombination zweier anderwärts bekanntgewordener Tatsachen charakterisierbar: nämlich 1. die Übertragung des auf Grund von Versuchen über die anomale Streuung der α-Strahlen an leichten Kernen gewonnenen Potentialverlaufs auf die schweren Kerne, und 2. die Anwendung des de Broglieschen Gedankens von der Wellennatur der Korpuskeln auf die sich in den virtuellen Niveaus befindlichen α-Teilchen.

3. Quantitative Erklärung der Geiger-Nuttall-Relation. Zur quantitativen Behandlung des Problems der α-Emission, die darin besteht, eine quantitative Beziehung zwischen der Zerfallskonstante λ und der Energie des α-Teilchens aufzustellen, wurden mehrere Wege eingeschlagen. 1. Der einfachste und zugleich anschaulichste rührt von v. Laue (3) her. 2. Gamow selbst hat das Problem — die Herausarbeitung und Klarstellung der benutzten Methode verdankt man Kudar (4) — mit Hilfe komplexer Eigenwerte behandelt, ein Weg, völlig analog der üblichen Behandlungsweise von Problemen, bei denen gedämpfte Schwingungen hereinspielen. 3. Schließlich hat Born (5) einen Weg eingeschlagen, der sich am engsten an die übliche Methode der Wellenmechanik (Störungstheorie) anschließt. Da im folgenden auf diese Behandlungsweise nicht eingegangen werden wird, soll sie mit ein paar Worten in ihrer Abgrenzung gegen das Verfahren komplexer Eigenwerte geschildert werden. Während der Ansatz komplexer Eigenwerte sozusagen für beliebig lange Zeiten Gültigkeit beansprucht, liefert die Störungstheorie mit ihrer mathematischen Methode der Variation der Konstanten im Gegensatz hierzu zunächst nur eine für sehr kleine Zeiten gültige Formel. Die Übergangswahrscheinlichkeit (Zerfallskonstante) wird durch das bekannte Matrixelement $2\pi\Phi^2/h$ gegeben, worin Φ die Matrixelemente der Störungsfunktion (äußerer Potentialverlauf) bedeuten. 4. Ein ganz direkter Weg zur Berechnung der Zerfallskonstante liegt in den Eigenschaften der virtuellen Niveaus begründet. In § 5 hatten wir gesehen, daß mit der Instabilität der virtuellen Niveaus ursächlich eine Unschärfe verknüpft ist. Für diese Unschärfe ergab sich bei leichten Kernen

$$\Delta E_\alpha = h\,\frac{2v}{r_0}\,\frac{n^2 \operatorname{tg}\alpha_0}{n^2+\operatorname{tg}^2\alpha_0}\,e^{-\varkappa(2\alpha_0-\sin 2\alpha_0)}, \qquad (15)$$

ein Ausdruck, der auch für die schweren Kerne unveränderte Gültigkeit behält, da die Voraussetzungen der Anwendbarkeit der bei der Ableitung von (15) benutzten asymptotischen Entwicklungen bei radioaktiven Kernen nur um so besser erfüllt sind. Da aber die Unschärfe ΔE_α der virtuellen Niveaus nach der Heisenbergschen Unschärferelation mit ihrer mittleren Lebensdauer τ durch die Beziehung $\tau \cdot \Delta E_\alpha = h$ verknüpft ist, folgt, da $\lambda = 1/\tau$ sofort $\lambda = \Delta E_\alpha/h$ oder

$$\lambda = \frac{2v}{r_0}\,\frac{n^2 \operatorname{tg}\alpha_0}{n^2+\operatorname{tg}^2\alpha_0}\,e^{-\varkappa(2\alpha_0-\sin 2\alpha_0)}, \qquad (15')$$

was sich mit den nach den Methoden 1. und 2. zu gewinnenden Formeln als identisch erweisen wird.

4. v. Laues anschauliche Deutung der Zerfallskonstante. Das α-Teilchen befinde sich in der durch Fig. 12 dargestellten Potentialmulde. Nehmen wir an, bis zur Zeit $t = 0$ wären die Potentialberge unendlich hoch. Dann hätten wir im Kern einfach eine hin und her laufende monochromatische Welle. Zur Zeit $t = 0$ soll sich die Potentialschwelle plötzlich erniedrigen und die in Fig. 12 gegebene Gestalt annehmen. Dann wird die Welle im Innern an der Schwelle gespiegelt und gebrochen werden. Es tritt aus dem Kern eine Welle von der Intensität J_0 aus, die aber nach der Zeit τ, welche die Welle zum Durchlaufen des Kerninnern $2r_0$ benötigt, abbricht und durch eine von der geringeren Intensität RJ_0 ersetzt wird, wenn R das Reflexionsvermögen bedeutet. Nach n Reflexionen wird

die Intensität $J = J_0 R^n$. Die Intensität wäre also eine Stufenkurve; da aber die Zeit τ unbeobachtbar klein ist, ergibt die Beobachtung eine kontinuierliche Kurve $J = J_0 e^{-\lambda t}$ mit $\lambda = -\frac{\ln R}{\tau}$ und $n\tau \sim t$. Da nun die Durchlässigkeit $G = 1 - R$ ist und $G \ll 1$, so wird

$$\lambda = -\frac{\ln(1-G)}{\tau} = \frac{G}{\tau} + \frac{G^2}{2\tau} + \cdots,$$

also

$$\lambda = \frac{G}{\tau}. \qquad (17)$$

Die Zerfallskonstante stellt sich also dar als Produkt aus der Durchlässigkeit der Schwelle in die Zahl der Stöße des Teilchens gegen die Potentialwand.

Das mathematische Problem besteht also bloß in der Berechnung der Durchlässigkeit G für die Potentialschwelle. Diese hat man dann durch die Zeit zu dividieren, welche die Welle zum Durchlaufen des Kerninneren benötigt: $\tau = 2r_0/v$. Für ein linear abgebrochenes Coulombfeld ergibt sich nun (6) G zu:

$$G = 2\sin 2\alpha_0 e^{-\varkappa(2\alpha_0 - \sin 2\alpha_0)}$$

und daher

$$\lambda = \frac{v}{r_0}\sin 2\alpha_0 e^{-\varkappa(2\alpha_0 - \sin 2\alpha_0)}, \qquad (18)$$

wenn, wie in § 5, α_0 definiert ist durch

$$\cos^2\alpha_0 = \left(\frac{E_\alpha}{E_{\text{pot}}}\right)_{r_0}.$$

Wie v. Laue selbst ausdrücklich hervorgehoben hat, gilt seine Ableitung nur unter der Voraussetzung, daß $2r_0$ groß gegen die de Broglie-Wellenlänge Λ des α-Teilchens ist: $2r_0 \gg \Lambda$. Diese Voraussetzung ist zwar bei den Anwendungen auf radioaktive Kerne nicht ganz streng erfüllt, da $2r_0 \sim 2 \cdot 10^{-12}$ cm und $\Lambda \sim 6 \cdot 10^{-13}$ cm, so daß $2r_0/\Lambda \sim 3$, aber das Verhältnis 3 ist doch genügend groß, um die Anwendung zu rechtfertigen. Während die Vorteile der v. Laueschen Methode offensichtlich sind, ist ihr Nachteil darin gelegen, daß bei ihr jegliches Eingehen der virtuellen Niveaus verschwindet, was allerdings bei dem bloßen Problem der Berechnung der Zerfallskonstanten keine Rolle spielt. Daß die Durchführung der v. Laueschen Methode zunächst nur für den eindimensionalen Coulombfall gelang, ist nur ein scheinbarer Nachteil, denn einerseits führt die dreidimensionale Behandlung des Problems nach dem Rechenverfahren der komplexen Eigenwerte zu identisch derselben Formel für die Zerfallskonstante, andererseits hat G. Jaffé (7) gezeigt, wie man durch Einführung physikalisch sinnvoller Singularitäten die v. Laueschen Methode verallgemeinern kann, um auch den dreidimensionalen Fall zu beherrschen.

Eine erste Überprüfung der Formel (18) kann nun in der Weise erfolgen, daß man zunächst für jeweils ein Element der drei radioaktiven Familien rückwärts aus den experimentellen Werten von λ und den zugehörigen Zerfallsenergien den Parameter r_0 so bestimmt, daß das berechnete λ mit dem experimentellen übereinstimmt und dann unter Voraussetzung der Konstanz dieser Kernradien für jeweils eine ganze Familie die Zerfallskonstanten berechnet. Die Durchführung (6) zeigt, daß die so erhaltenen theoretischen Werte recht gut mit den experimentellen übereinstimmen. Abweichungen sind allerdings an mehreren Stellen vorhanden, doch sind diese selbstverständlich auf die nicht zutreffende Voraussetzung der Konstanz des Kernradius für eine ganze Familie zurückzuführen (vgl. hierzu § 8, 5d).

5. Behandlung des Problems der α-Emission mit Hilfe komplexer Eigenwerte (8). In § 8, 2 hatten wir zur qualitativen Erklärung der α-Emission angenommen, daß sich die α-Teilchen in den radioaktiven Kernen in instabilen virtuellen Niveaus befinden. Die Wahrscheinlichkeitsdichte eines solchen α-Teilchens muß infolge der Instabilität des virtuellen Niveaus zeitlich abklingen, welcher Bedingung eben am einfachsten durch den Ansatz komplexer Eigenwerte genügt werden kann: $E = E_\alpha - i\frac{\hbar}{2}\lambda$, wobei λ die Zerfallskonstante und der Realteil E_α die Zerfallsenergie (= Energie des virtuellen Niveaus) bedeutet. Dies hat für die zeitabhängige Schrödinger-Funktion u zur Folge:

$$u = \psi(xyz)e^{-i\frac{E_\alpha}{\hbar}t}e^{-\frac{\lambda}{2}t}.$$

Dieselbe ist zeitlich gedämpft, die Wahrscheinlichkeitsdichte $|u|^2$ klingt also, wie erforderlich, gemäß $e^{-\lambda t}$ ab. Diese zeitliche Abklingung ist nur eine äußerst schwache, die ψ-Schwingung im Kerninnern kann praktisch als ungedämpft betrachtet werden.

Der Ansatz komplexer Eigenwerte bedingt natürlich keine Verletzung der Tatsache, daß wir es in der Wellenmechanik immer nur mit hermiteischen Operatoren, d. h. reellen Eigenwerten zu tun haben. Tatsächlich haben wir ja auch unter § 8, 3 gesehen, wie die Zerfallskonstante ohne den Ansatz komplexer Eigenwerte direkt auf Grund der Heisenbergschen Unschärferelation gefunden werden kann. Komplexe Eigenwerte benutzt man vielmehr aus rein rechentechnischen Gründen, um die Randbedingungen des Problems leichter erfüllen zu können. Da nämlich die ψ-Funktion im Kerninnern als Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung mit nur zwei willkürlichen Konstanten behaftet ist, von denen eine bei dreidimensionaler Behandlung des Problems durch die Regularitätsforderung im Nullpunkt festgelegt wird, und im Unendlichen der Natur des Problems gemäß nur eine weglaufende Welle vorhanden sein darf, hätten wir, um die Bedingungen an der Übergangsstelle r_0 des Potentials zu erfüllen, nur noch eine Konstante zur Verfügung, während man doch auf Grund des wellenmechanischen Erhaltungssatzes fordern muß, daß nicht nur die Funktion, sondern auch die erste Ableitung stetig sein muß. Diese zweite erforderliche Konstante wird nun gerade durch λ geliefert, was sofort noch klarer hervorgehen wird.

a) Ansatz der Lösungen. Wir haben auszugehen von der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung:

$$\Delta u + \frac{2m}{\hbar}\, i\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{2m}{\hbar^2}\, V u = 0,$$

wo $u = u(xyzt)$, $V = V(xyz)$. Da V von der Zeit nicht abhängt, wird diese Gleichung durch den Ansatz gelöst:

$$u = \psi(xyz)\, e^{-i\frac{E}{\hbar}t},$$

wobei ψ der Gleichung genügt:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi = 0.$$

Die Schematisierung des Potentialverlaufes ist natürlich die gleiche wie die bisher verwendete (vgl. Fig. 12). Führen wir nun, da das linear abgeschnittene Coulomb-Feld kugelsymmetrisch ist, Polarkoordinaten (r, φ, ϑ) ein, so wird unter der Voraussetzung $\frac{\partial}{\partial\varphi} = 0$

$$\frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\vartheta\, \frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\, \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)\right] + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi = 0.$$

Da, wie bereits erwähnt, V kugelsymmetrisch ist, also nicht von ϑ abhängt, kann die Lösung in der Form angesetzt werden: $\psi = \chi_l(r) P_l(\cos\vartheta)$. Dabei bedeutet $P_l(\cos\vartheta)$ die l-te nicht normierte Legendresche (zonale) Kugelfunktion. Für alle weiteren Betrachtungen setzen wir der Einfachheit halber $l = 0$ voraus (wegen $l \neq 0$ vgl. (8)). Dann erhält man für χ_0 die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\chi_0}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\chi_0}{dr} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\chi_0 = 0.$$

Für den Innenraum, wo $V = \text{const} = U$ sein soll, lautet also die Lösung

$$\chi_0^{(i)} = \frac{1}{r}\sin\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - U)}\, r\right),$$

die, wie erforderlich, eine stehende Welle repräsentiert und für $r = 0$ regulär bleibt.

Für den Außenraum, wo $V = 2e^2Z/r$, sei das ganze transzendente Integral der Differentialgleichung $\chi_0^{(a)}(kr, \varkappa)$; mit

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}; \qquad \varkappa = \sqrt{\frac{2m}{E}}\frac{2e^2Z}{\hbar}.$$

$\chi_0^{(a)}$ kann nun in zwei Bestandteile aufgespalten werden:

$$\chi_0^{(a)} = \frac{\chi_0^{1} + \chi_0^{2}}{2},$$

von denen der erste asymptotisch für große Werte der Veränderlichen eine divergierende, der zweite eine konvergierende Welle darstellt (vgl. hierzu ganz analog in § 1 und § 5). Nur $\chi_0^{1)}$, und zwar in asymptotischer Gestalt, werden wir benötigen. Da nun

$$k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE_\alpha\left(1 - \frac{i\hbar\lambda}{2E_\alpha}\right)} \sim \frac{mv}{\hbar} - i\frac{\lambda}{2v},$$

ist der reelle Bestandteil von k von der Größenordnung 10^{13}, während der imaginäre Bestandteil höchstens von der Größenordnung 10^{-4} ist, also 10^{17}mal kleiner als der reelle. Da

$$\varkappa = \frac{2e^2Z}{\hbar}\sqrt{\frac{2m}{E_\alpha\left(1 - \frac{i\hbar\lambda}{2E_\alpha}\right)}} \sim \frac{4e^2Z}{\hbar v} + i\frac{\lambda}{2v}\left(\frac{E_{\text{pot}}}{E_{\text{kin}}}\right)_{r_0}$$

ist der reelle Bestandteil von der Größenordnung 45, während der imaginäre unter der Voraussetzung $r_0 \sim 10^{-12}$ cm höchstens von der Größenordnung 10^{-16} ist, also 10^{18}mal kleiner als der reelle. Wir können also für $\chi_0^{1)}$ an der Übergangsstelle r_0 asymptotische Entwicklungen benutzen, die sowohl für große Werte der Veränderlichen ($k_r r_0 \sim 10$) als auch für große Werte des Parameters ($\varkappa_r \sim 45$) gelten, wobei $\varkappa$ als rein reell betrachtet werden kann und die Veränderliche sehr angenähert längs der reellen Achse groß wird.

b) Erfüllung der Übergangsbedingungen. An der Übergangsstelle $r = r_0$ müssen die Lösungen des Außen- und Innenraums samt ihren ersten Differentialquotienten stetig ineinander übergehen. Das ergibt die Bedingungen:

$$\left|\begin{array}{l} A\,\psi^{(i)} = 1\cdot\psi^{(a)} \\ A\,\dfrac{d\psi^{(i)}}{dr} = 1\cdot\dfrac{d\psi^{(a)}}{dr} \end{array}\right|_{r=r_0}$$

Diese zwei linearen homogenen Gleichungen für die Unbekannten A und 1 können nur dann zusammen bestehen, wenn ihre Determinante verschwindet, was die Eigenwertbedingung für E liefert, also

$$\left|\begin{array}{cc} \chi_0^{(i)} & \chi_0^{1)} \\ \dfrac{d\chi_0^{(i)}}{dr} & \dfrac{d\chi_0^{1)}}{dr} \end{array}\right|_{r=r_0} = 0.$$

Da nun

$$\frac{(\chi_0^{(i)})'}{\chi_0^{(i)}} = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\sqrt{E - U}\,\operatorname{ctg}\left(\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\sqrt{E - U}\, r\right) - \frac{1}{r}$$

und

$$\frac{(\chi_0^{1)})'}{\chi_0^{1)}} \sim \frac{1 - \frac{i}{2}e^{-\varkappa_r(2\alpha_0 - \sin 2\alpha_0}}{1 - \frac{i}{2}e^{-\varkappa_r(2\alpha_0 - \sin 2\alpha_0}}\,\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\sqrt{\frac{2e^2Z}{Er} - 1} - \frac{1}{r}$$

erhält die Determinante die Form:

$$\sqrt{E_\alpha - U}\,\operatorname{ctg}\left(\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\sqrt{E - U}\, r_0\right) = -\frac{1 - \frac{i}{2}e^{-\varkappa_r(2\alpha_0 - \sin 2\alpha_0)}}{1 + \frac{i}{2}e^{-\varkappa_r(2\alpha_0 - \sin 2\alpha_0)}}\sqrt{E_\alpha}\,\operatorname{tg}\alpha_0.$$

Dabei konnten in den e-Potenzen alle auftretenden Größen durch ihre reellen Bestandteile ersetzt werden. $\cos^2\alpha_0$ ist wie früher $\frac{k_r r_0}{\varkappa_r} = \frac{r_0}{r^*}$.

c) Die Zerfallskonstante. Da nun $E = E_\alpha - i\frac{\hbar}{2}\lambda$ und also der imaginäre Bestandteil von E sehr klein gegen den reellen ist, kann man die im

ctg auftretende Wurzel nach der Größe $\hbar\lambda$ entwickeln und sich auf die ersten Potenzen dieser Größe beschränken. Trennt man dann reelle und imaginäre Bestandteile, so ergeben die reellen Glieder die Eigenwertbedingung für E_α in der Form:

$$\operatorname{tg} n k_r r_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_0 = -n , \qquad (14)$$

während sich aus den imaginären Gliedern die Zerfallskonstante berechnet zu:

$$\lambda = \frac{2v}{r_0} \frac{n^2 \operatorname{tg} \alpha_0}{n^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha_0} e^{-\varkappa_r (2\alpha_0 - \sin 2\alpha_0)} . \qquad (18')$$

Die Eigenwertbedingung der virtuellen Niveaus ist natürlich mit der Resonanzbedingung § 5, Gl. 14 identisch, während der Ausdruck für λ für $n = 1$ mit dem nach der v. Laueschen Methode erhaltenen Wert, ebenso aber auch mit dem unter 3. aus der Unschärfe der virtuellen Niveaus erhaltenen Wert für λ identisch ist.

d) Berechnung der Kernradien der α-Strahler. Nachdem auf Grund der v. Laueschen Methode gezeigt worden war, daß unter Voraussetzung konstant gehaltener Kernradien für eine ganze Familie die Zerfallskonstanten angenähert von der Theorie richtig wiedergegeben werden, ist es jetzt möglich, diese Voraussetzung zu verlassen. Da nämlich die Formel für die Zerfallskonstante in Verbindung mit der Resonanzbedingung zwei Gleichungen mit den zwei Parametern r_0 und n darstellt, wird es möglich sein, unter Voraussetzung von λ und v aus diesen zwei Gleichungen r_0 und n zu berechnen. Diesen Weg haben Atkinson und Houtermans (9) für die *U-Ra*-Familie eingeschlagen. Das Resultat zeigt die nachfolgende Tabelle.

Element	*UI*	*Io*	*Ra*	*RaEm*	*RaA*	*RaC'*	*Po*	*ThEm*	*AcEm*
Ordnungszahl	92	90	88	86	84	84	84	86	86
$r_0 \cdot 10^{-13}$ cm . .	10,13	10,10	9,63	9,70	9,55	10,90	8,69	9,69	8,92
n	0,328	0,312	0,320	0,297	0,288	0,222	0,336	0,277	0,288

Man sieht, daß der Kernradius mit wachsender Ordnungszahl, wie zu erwarten war, wächst, allerdings mit einem Sprung für *RaC'*. Dagegen ist der Brechungsindex n für die ganze Familie nahezu konstant. Den Sprung im Kernradius bei *RaC'* sucht Gamow (10) durch die Annahme verschiedener l, d. h. verschiedener Spin im Mutter- und Tochterkern zu deuten.

Literaturverzeichnis.

(Dieses erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit im üblichen Sinne; es sind vielmehr nur jene Arbeiten hier aufgeführt, die einen positiven Beitrag zum vorliegenden Bericht geliefert haben.)

I. α- bzw. Protonen-Probleme.

A. Streuung der α-Teilchen an schweren Kernen.

§ 1. Wellenmechanische Theorie der normalen α-Streuung.

1) H. Geiger und E. Marsden, Proc. Roy. Soc. London (A) **82**, 495, 1909.
2) E. Rutherford, Phil. Mag. (6) **21**, 669, 1911.
3) G. Wentzel, Zeitschr. f. Phys. **40**, 590, 1927; vgl. auch R. Oppenheimer, Zeitschr. f. Phys. **43**, 413, 1927.
4) Chr. Møller, Zeitschr. f. Phys. **66**, 573, 1930; vgl. auch Th. Sexl, Zeitschr. f. Phys. **67**, 766, 1931.
5) W. Gordon, Zeitschr. f. Phys. **48**, 180, 1928; N. F. Mott, Proc. Roy. Soc. London (A) **118**, 541, 1928; G. Temple, Proc. Roy. Soc. London (A) **121**, 673, 1928; A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. (5) **11**, 257, 1931; Th. Sexl, Zeitschr. f. Phys. **82**, 650, 1933. Die im Text gegebene Darstellung schließt sich an die zuletzt genannte Arbeit an.
6) H. Geiger und E. Marsden, Phil. Mag. (6) **25**, 604, 1913.
7) J. Chadwick, Phil. Mag. (6) **40**, 743, 1920.
8) E. Rutherford und Chadwick, Phil. Mag. (6) **50**, 889, 1925.
9) Rutherford, Chadwick, Ellis: „Radiations from radioactive substances", S. 323. Cambridge 1930.

B. Streuung gleichartiger Teilchen bei kleinen Geschwindigkeiten.

§ 2. Motts Voraussage eines wellenmechanischen Effekts.

1) C. G. Darwin, Phil. Mag. (6) **27**, 499, 1914.
2) N. F. Mott, Proc. Roy. Soc. London (A) **125**, 222, 1929; **126**, 259, 1930. Daß auch für aperiodische Prozesse symmetrisierte Wellenfunktionen verwendet werden müssen, wurde zuerst von R. Oppenheimer, Phys. Rev. **32**, 361, 1928 betont.
3) Th. Sexl, Zeitschr. f. Phys. **80**, 690, 1933.

§ 3. Experimentelle Bestätigungen der theoretischen Voraussagen.

1) Chr. Gerthsen, Ann. d. Phys. (5) **9**, 769, 1931.
2) J. Chadwick, Proc. Roy. Soc. London (A) **128**, 114, 1930.
3) P. M. S. Blackett und F. C. Champion, Proc. Roy. Soc. London (A) **130**, 380, 1930.

C. Streuung der α-Teilchen an leichten Kernen. Theorie der anomalen Streuung.

§ 4. Übersicht über die experimentellen Ergebnisse.

1) P. M. S. Blackett, Proc. Roy. Soc. London (A) **103**, 62, 1923; P. M. S. Blackett und E. P. Hudson, Proc. Roy. Soc. London (A) **117**, 124, 1927.
2) E. Rutherford, Phil. Mag. (6) **37**, 537, 1919.
3) J. Chadwick und E. S. Bieler, Phil. Mag. (6) **42**, 923, 1921.
4) E. Rutherford und J. Chadwick, Phil. Mag. (7) **4**, 605, 1927.
5) P. Wright, Proc. Roy. Soc. London (A) **137**, 677, 1932.

6) E. S. Bieler, Proc. Roy. Soc. London (A) **105**, 434, 1924.
7) E. Rutherford und J. Chadwick, Phil. Mag. (6) **50**, 889, 1925.
8) W. Riezler, Proc. Roy. Soc. London (A) **134**, 154, 1931.

§ 5. Theorie der anomalen Streuung.

1) E. S. Bieler, Proc. Cambr. Phil. Soc. **21**, 686, 1923.
2) H. Pettersson, Wiener Ber., math.-phys. Kl. (IIa) **133**, 590, 1924.
3) P. Debye und W. Hardmeier, Physik. Zeitschr. **27**, 196, 1926; W. Hardmeier, Physik. Zeitschr. **27**, 574, 1926; **28**, 181, 1927; vgl. auch A. Smekal, Physik. Zeitschr. **27**, 383, 1926; E. Guth, Physik. Zeitschr. **27**, 507, 1926.
4) W. Hardmeier, Helv. Phys. Acta **1**, 193, 1928.
5) A. C. Banerji, Nature **125**, 167, 1930; Phil. Mag. (7) **9**, 273, 1930; Th. Sexl, Die Naturwissensch. **18**, 247, 1930; Chr. Møller, Nature **125**, 549, 1930; Zeitschr. f. Phys. **62**, 54, 1930; H. S. W. Massey, Proc. Roy. Soc. London (A) **127**, 671, 1930; vgl. auch neuerdings wieder K. K. Mukherjee, Physik. Zeitschr. **34**, 175, 1933.
6) Th. Sexl, Zeitschr. f. Phys. **67**, 766, 1931.
7) E. Guth und Th. Sexl, Zeitschr. f. Phys. **66**, 557, 1930 (vorl. Mitteilung); Physik. Zeitschr. **32**, 655, 1931 (Vortrag auf der Züricher Kernwoche); Physik. Zeitschr. **32**, 941, 1931 (Vortrag auf dem Physikertag in Bad Elster); vgl. auch qualitative Betrachtungen zu unserem Problem von G. Beck, Zeitschr. f. Phys. **62**, 331, 1930, und N. F. Mott, Proc. Roy. Soc. London (A) **133**, 228, 1931.
8) Th. Sexl, Zeitschr. f. Phys. **56**, 72, 1929; **81**, 163, 1933.

§ 6. Vergleich mit den Experimenten.

1) H. M. Taylor, Proc. Roy. Soc. London (A) **134**, 103, 1931; **136**, 605, 1932; Nature **129**, 56, 1932.

D. α-Emission.

§ 7. Die Geiger-Nuttall-Relation.

1) H. Geiger und J. M. Nuttall, Phil. Mag. (6) **22**, 613, 1911; **23**, 439, 1912.

§ 8. Theorie der radioaktiven α-Emission.

1) G. Gamow, Zeitschr. f. Phys. **51**, 204, 1928.
2) R. W. Gurney und E. U. Condon, Nature **122**, 439, 1928; Phys. Rev. **33**, 127, 1929.
3) M. v. Laue, Zeitschr. f. Phys. **52**, 726, 1928.
4) J. Kudar, Zeitschr. f. Phys. **53**, 61, 95, 134; **54**, 297; **57**, 710, 1929.
5) M. Born, Zeitschr. f. Phys. **58**, 306, 1929.
6) Th. Sexl, Zeitschr. f. Phys. **56**, 62, 1929; vgl. auch die relativistische Verallgemeinerung bei S. Gupta, Zeitschr. f. Phys. **69**, 686, 1931.
7) G. Jaffé, Zeitschr. f. Phys. **66**, 770, 1930.
8) Th. Sexl, Zeitschr. f. Phys. **81**, 163, 1933.
9) R. d'Atkinson und F. G. Houtermans, Zeitschr. f. Phys. **58**, 478, 1929.
10) G. Gamow, Nature **129**, 470, 1932; **131**, 618, 1933.

(Abgeschlossen 15. Juni 1933.)

Universität Wien, Institut für theoretische Physik.

(Eingegangen 7. Juli 1933.)

ZUSCHRIFTEN.

Elektronenreflexion an Gläsern.

Von K. R. Dixit.

Im Juni und Juli 1932 wurden Reflexionsversuche mit schnellen Elektronen an einigen Gläsern gemacht:

1) Undurchsichtiger Quarz.
2) Durchsichtiger Quarz.
3) Pyrexglas.
4) Gewöhnliches Natriumglas.
5) Schweres Glas.
6) Gewöhnliche Mikroskop-Deckgläser.
7) Milchglas (poliertes Stück eines Lampenschirmes).

Die Oberflächen der ersten fünf Substanzen waren optisch plan.

Diese lieferten alle einen diffusen Debye-Scherrer-Ring, der einer Periode von ~ 1,5 Å entspricht, und auch einen Punkt innerhalb dieses Ringes, entsprechend einer Periode von ~ 1,55 Å. Dieser Punkt war nicht besonders scharf, außerdem war seine Intensität bei den einzelnen Silikaten verschieden, wenn man die Intensität des diffusen Ringes in allen Fällen gleichsetzt. Im Falle des undurchsichtigen Quarzes, der mit bloßem Auge Faserstruktur erkennen ließ, hatte dieser Punkt die größte Intensität, sogar eine größere als der Ring.

Alle diese Substanzen sind Isolatoren. Wegen der Gefahr einer elektrostatischen Aufladung konnte man nicht unter kleineren Glanzwinkeln beobachten. Deshalb war es nicht möglich zu entscheiden, ob noch Ringe entsprechend einer größeren Periode vorhanden sind.

Die Entfernung 1,55 Å ist gerade der *Si-O*-Abstand. Da die Oberfläche poliert ist, ist dieser Abstand wohl der einzige, der ein Interferenzbild liefern könnte. Es scheint merkwürdig, daß der Vorgang des Polierens, der gewöhnlich zur Zerstörung[1]) der Kristallstruktur führt, hier eine Art Kristallstruktur hervorruft, wie sie das Auftreten eines Interferenzpunktes nahelegt, zumal man bei unpolierten Gläsern eine vollkommen regellose Anordnung[2]) nachweisen konnte.

1) Darbyshire und Dixit, Phil. Mag. **16**, 961, 1933.
2) Warren, Zeitschr. f. Krist. **86**, 349, 1933.

BESPRECHUNGEN.

Reinhold Dahlgreen, Tonfilmwiedergabe. 55 S. Mit 44 Abb. Berlin 1932. Union Deutsche Verlagsgesellschaft. RM 2.50.

Der Verfasser zeichnet als 1. Vorsitzender des Verbandes Deutscher Lichtspielvorführer. Sein Büchlein ist für den praktischen Gebrauch des Lichtspielvorführers selbst bestimmt und sieht deshalb von theoretischen Erörterungen irgendwelcher Art gänzlich ab. Es scheint mir jedoch angebracht, es auch in dieser Zeitschrift zu empfehlen, da es in ganz ausgezeichneter Weise wiedergibt, worauf es denn nun eigentlich in der Praxis ankommt.

Jentzsch.

H. Dohse und H. Mark, Die Adsorption von Gasen und Dämpfen an festen Körpern. (Hand- und Jahrbuch der chemischen Physik, herausgegeben von A. Eucken und K. L. Wolf, Bd. 3, 1. Teil, Abschnitt I.) 116 S. Mit 53 Abb. Leipzig 1933. Akademische Verlagsgesellschaft. RM 12.—.

Die erste Monographie, in der das hier behandelte Gebiet von dem von den Verfassern eingenommenen Standpunkt aus behandelt wurde, erschien unter dem Titel „Adsorption und Kapillarkondensation" 1928 im gleichen Verlag aus der Feder des Referenten. Seit jener Zeit sind auf diesem Gebiet sowohl in experimenteller als theoretischer Hinsicht Fortschritte zu verzeichnen. In experimenteller insbesondere durch die Entdeckung der sogenannten aktivierten Adsorption, in theoretischer durch die Anwendung der neuen Quantentheorie (Wellenmechanik). Die vorliegende Darstellung unterscheidet sich von der genannten älteren — abgesehen von einer engeren Stoffbegrenzung; die Kapillarkondensation ist einem anderen Abschnitt zugewiesen — in der Hauptsache durch die Berücksichtigung dieser neueren Fortschritte und durch eine etwas weniger ausführliche und strenge Darstellung. — Nach einer kurzen Einleitung folgt Kap. 2 über die Thermodynamik des Adsorptionsgleichgewichts, das mit geringfügigen Änderungen gekürzt der Monographie des Ref. entnommen ist. Kap. 3 behandelt die Theorie der „verdünnten Adsorption", d. h. des Adsorptionsbereiches, wo die Wirkung der adsorbierten Moleküle aufeinander vernachlässigt werden kann. Es wird von den einfachsten Ansätzen ausgegangen, und weiter werden Versuche zu Verbesserungen derselben diskutiert. In Kap. 4 werden die Ergebnisse der Theorie mit der Erfahrung verglichen; es enthält als neu eine kurze Darstellung der von London herrührenden Quantentheorie der Kohäsions- und Adsorptionskräfte. Hauptsächlich diese Darstellung, sowie kurze Abschnitte über Anomalien der verdünnten Adsorption, über treppenförmige Isothermen, sowie über die aktivierte Adsorption enthalten die Fortschritte, die seit der Monographie des Ref. erzielt wurden. Kap. 5 und 6 handeln von Theorie und Erfahrung der Adsorption bei höheren Belegungsdichten, wo die Wirkung der adsorbierten Moleküle aufeinander ins Spiel tritt. Auch hier finden sich gewisse Abschnitte der Monographie wieder. Kap. 7 enthält eine wesentlich der Monographie entnommene Diskussion der Mischadsorption. Kap. 8 gibt eine kurze Übersicht über die experimentellen Methoden zur Messung der Gleichgewichtsgrößen. Schlußkapitel 9 enthält Bemerkungen über die Adsorptionsgeschwindigkeit.

Der vorliegende Abschnitt des Eucken-Wolfschen Handbuches gibt im ganzen eine gute Übersicht über den derzeitigen Stand des behandelten Gebietes. — Einige Versehen und Irrtümer, die dem Ref. aufgefallen sind, seien erwähnt. Auf S. 33 ist von den Keesomschen Polarisations- und den Debyeschen Orientierungskräften die Rede; hier liegt eine Vertauschung der Autoren vor. — Formel (63) auf S. 74 ist nur eine Näherung für kleine a. — S. 83 findet sich Tab. 14 nach Langmuir für die mittleren Verweilzeiten σ der adsorbierten Moleküle. Wie Ref. in seiner Monographie (S. 173) bemerkt hat, stellt σ nicht die mittlere Verweilzeit dar, sondern eine Größe anderer Dimension. — S. 85 findet sich eine von Magnus herrührende Formel für die Adsorptionsisotherme, die auf einer unzutreffenden Ableitung beruht. Die aus den Magnusschen Voraussetzungen folgende Formel muß richtig heißen:

$$p = \left(\lim_{p=0} \frac{d\,p}{d\,a}\right) \cdot a \, \frac{1}{1-\beta a} \, e^{\left[\frac{\beta a}{1-\beta a} + \frac{2a}{RT}a\right]}$$

(siehe E. Hückel in Far. Soc., The adsorption of gases by solids, A general discussion, p. 442, 1932).

E. Hückel.

Walther und Werner Gerlach, Die Chemische Emissions-Spektralanalyse. II. Teil, Anwendung in Medizin, Chemie und Mineralogie. Gr.-8°. VII und 191 S. Mit 73 Fig. Leipzig 1933. Leopold Voß. Kart. RM 13.—.

Dem Gerlach-Schweitzer folgt nach drei Jahren als zweiter Teil ein Gerlach-Gerlach. Was die neue Blüte der Emissionspektralanalyse an methodischen Fortschritten erbracht hat, wird aus dem Bericht, der viele sonst nicht veröffentlichte Befunde der Verfasser enthält, in eindrucksvoller Weise klar. Die beiden ersten Kapitel enthalten, die entsprechenden Abschnitte von Teil I ergänzend, die für jeden praktischen Erfolg maßgebenden Erfahrungen über Lichtquellen und Aufnahmetechnik mit klaren und knappen Anweisungen; im dritten Kapitel wird eingehend die Empfindlichkeit der Nachweismethode besprochen, worauf im vierten neue Tabellen zur Methode der homologen Linienpaare folgen. Im fünften Kapitel wird in grundlegender Weise die Untersuchung von Organen, Sekreten und Exkreten behandelt; diese Methodik dürfte von heute noch kaum übersehbarer Bedeutung sein, zahlreiche Probleme der Physiologie und Medizin werden durch sie ihrer Lösung näher gebracht werden. Beispiele hierfür aus den Gebieten der Elektropathologie, Gewerbekrankheiten und gerichtlichen Medizin bringt Kap. VI, Chemische Anwendungen werden in Kap. VII, Mineralanalysen in Kap. VIII besprochen; Ausführungen über qualitative Analysen schließen das Buch. Um nicht zu wiederholen, was vor drei Jahren bei der Besprechung des I. Teiles gesagt wurde, sei nur kurz bemerkt, daß das Buch in jeder Beziehung von der meisterhaften Experimentierkunst der Verfasser Zeugnis ablegt und als

Bericht über den Stand einer modernen physikalischen Methode vorbildlich ist; die vielen ausgezeichnet gelungenen Abbildungen liefern jedem Benützer der Methoden sofort einen Maßstab für die Güte der eigenen Leistung. L. Ebert.

A. Kintchine, Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. (2. Band, 4. Heft der „Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete", herausgegeben von der Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik".) Gr.-8°. VI und 77 S. Berlin 1933. Jul. Springer. Geh. RM 9.60.

Die Schrift handelt von denjenigen mathematischen Entwicklungen, welche sich um die sog. Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung gruppieren und welche als spezielle Fälle z. B. die wohlbekannten Sätze von Laplace und Poisson liefern. Das hiermit bezeichnete Gebiet ist erst neuestens in ein Stadium lebhafterer, aussichtsvoller Entwicklung getreten. Verfasser unternimmt es, einen Ausschnitt aus dem Erreichten zu geben. Und zwar legt er, unter bewußtem Verzicht auf Vollständigkeit, Gewicht vor allem darauf, mit Hilfe einer neuen einheitlichen, sehr verallgemeinerungsfähigen Methode zu den wichtigsten bisherigen Ergebnissen zu gelangen; überdies stellt er das Streben nach möglichster Allgemeinheit zurück zugunsten einer klaren Herausarbeitung der Beweisgedanken und der Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Fragestellungen. So ist eine sehr anziehende Darstellung entstanden. Für den Physiker wird es von Interesse sein, zu sehen, wie sich z. B. die Diffusionsprobleme (Kapitel 3) oder die Probleme der einseitigen Irrfahrt (Kapitel 4) aus dem Laplace-Tchebycheffschen als naturgemäße Verallgemeinerungen auch hinsichtlich ihrer Behandlung ergeben. Der Poissonsche Grenzwertsatz und seine Verallgemeinerung findet sich in Kapitel 2, während das letzte (5. Kapitel) sich im wesentlichen mit Abschätzungen für das Wachstum gewisser zufälliger Veränderlicher beschäftigt. Übrigens zeigt auch diese Schrift deutlich, welch starke mathematische Hilfsmittel die Behandlung physikalischer Fragen erfordern kann. Die Lektüre erfordert Vorkenntnisse. Haupt.

J. Lense, Reihenentwicklung in der mathematischen Physik. Gr.-8°. 178 S. Mit 30 Abbildungen. Berlin und Leipzig 1933. W. de Gruyter u. Co. 1933. Geb. RM 9.50.

Wie bekannt, sind in der Physik Entwicklungen einer „willkürlichen" Funktion nach den Funktionen eines Orthogonalsystems von hervorragender Bedeutung. Das vorliegende Buch gibt eine in ihrer Übersichtlichkeit sehr brauchbare Darstellung der wichtigsten Klassen solcher Orthogonalsysteme, d. h. der wesentlichsten Eigenschaften dieser Funktionen unter Beiseitelassung allzu weitgehender Einzelheiten. Besprochen werden a) Laguerresche und Hermitesche Funktionen im Anschluß an die allgemeinen Erörterungen über Orthogonalsysteme (1. Abschnitt); b) Besselsche Funktionen (2. Abschnitt), und zwar auch im Komplexen, während die Darstellung bei den übrigen Funktionen sich meist auf das Reelle beschränkt; c) räumliche Kugelfunktionen sowie Kugelflächenfunktionen und Legendresche Polynome (3. Abschnitt); d) Lamésche Funktionen (4. Abschnitt). Den Abschluß bilden je ein Abschnitt über asymptotische Reihen und über die Gammafunktion. Von einem Eingehen auf Potenz- und Fourierentwicklungen wurde abgesehen. Die Ausgangspunkte für die Einführung der einzelnen Funktionensysteme sind verschieden gewählt; die zugehörigen Randwertaufgaben sind nicht durchweg vorangestellt. Die Abschnitte über konforme Abbildung durch Besselsche und Gammafunktion fußen auf eigenen Arbeiten des Verfassers. Zahlreiche Verweise, insbesondere auf die Klassiker, sowie ein Namen- und Sachverzeichnis erhöhen noch den Wert des Buches, welches dem Physiker sehr gute Dienste leisten wird. Haupt.

M. Lindow, Gewöhnliche Differentialgleichungen (Bd. 4 der mathematisch-physikalischen Bibliothek. II. Reihe: Abrisse aus dem Gebiete der Mathematik und der exakten Naturwissenschaften). 8°. VI und 121 Seiten. Mit 39 Figuren, 45 Beispielen und 160 Aufgaben. 2. Auflage. Leipzig und Berlin 1933. B. G. Teubner. Geb. RM 3.—.

Auch in diesem Bändchen, welches als Abschluß der in der gleichen Sammlung erschienenen Bändchen über Differential- und Integralrechnung gedacht ist, finden die physikalisch-technischen Anwendungen eine bevorzugte Berücksichtigung. Stets bilden geometrische oder naturwissenschaftliche Fragestellungen und der mathematische Ansatz für sie den Ausgangspunkt. Graphische und numerische Näherungsmethoden werden ausführlich besprochen. Das sehr inhaltsreiche Werkchen ist bestens zu empfehlen. Haupt.

E. Marx, Handbuch der Radiologie. Band VI. Quantenmechanik der Materie und Strahlung. I. Teil: Atome und Elektronen. VI und 466 S. Leipzig 1933. Akademische Verlagsgesellschaft. Brosch. RM 41.—, geb. RM 43.—.

Die 1. Auflage dieses Bandes erschien 1925, als in der Atomphysik noch alles im Werden war. Außerdem war die Gelegenheit wahrgenommen, ohne allzu strenges Festhalten an dem durch den Titel gezogenen Rahmen neue experimentelle Gebiete nachzutragen. Bei der Neuauflage sollte nun eine einheitliche Linie verfolgt werden und im VI. Band ein Überblick über die gesamte Quantenmechanik und ihre Anwendungen gegeben werden. Restlos ist aber die erwähnte Heterogenität nicht beseitigt. Der Beitrag von Hanle und Larché, der einen vorzüglichen Überblick über das gesamte Material der Stoßanregung und Ionisierung bringt, hat mit Theorie nicht viel zu tun. (Sie vermag ja auch nur die gröbsten Züge zu erklären.) Aus diesem Grund hätte man ihn vielleicht besser in einen andern Band, z. B. als Grundlage der Gasentladungen, gebracht. Aber im Grund ist dies ja eine Äußerlichkeit, die dem Wert des Werkes keinen Abbruch tut. Das 1. Kapitel bringt aus der Feder von v. Laue eine meisterhafte Darstellung der Wellenmechanik. Besonders nützlich wird manchem Leser die mit bescheidenen Mitteln

durchgeführte Darstellung der Diracschen Theorie des Wasserstoffatoms sein. Das 2. Kapitel enthält den schon erwähnten, klar und übersichtlich geschriebenen Bericht über die Stöße. Das 3. Kapitel bringt eine knappe, aber sehr klare Theorie der Elektronenleitung von F. Bloch. Einen breiten Raum nimmt das von G. Beck bearbeitete Kapitel über Kernphysik ein. Es hält sich — durch die Natur der Sache bedingt — weitgehend an die Erfahrungstatsachen und man sieht auch aus ihm wieder, daß die Theorie außer der Hyperfeinstruktur und der Überwindung von Potentialschwellen in der Kernphysik lauter ungelöste Probleme vor sich hat. Nebenbei eine Bitte, die für fast alle Darstellungen des periodischen Systems gilt: wann wird man, wie es die Paulische Theorie ergibt, Lanthan unter Yttrium und nicht zu den herausgesetzten seltenen Erden schreiben? Zusammenfassend ist der Band eine höchst wertvolle Bereicherung unserer Nachschlagliteratur, in dem schwierigste Probleme in übersichtlicher und verständlicher Weise dargestellt sind.

Joos.

P. Neményi, Wasserbauliche Strömungslehre. Gr.-8°. VIII u. 275 S. Mit 324 Abb. Leipzig 1933. J. A. Barth. RM 28.—; geb. RM 29,80.

Dieses Buch stellt eine umfassende, ins einzelne gehende Behandlung aller den Wasserbau betreffenden strömungstechnischen Fragen dar, wobei aber auch die theoretischen Grundlagen (z. B. Turbulenz oder Ähnlichkeitsgesetze) keineswegs fehlen. In dem Bestreben des Verfassers, möglichst alle einschlägigen Arbeiten älteren bis allerneuesten Datums zu berücksichtigen, vermißt man jedoch manchmal die klare Herausarbeitung dessen, was unter der Vielzahl der vorgetragenen Meinungen als wirklich gesichert anzusehen ist. Reiches, wohlgelungenes Bildmaterial von Strömungen und Flußbettbildungen tragen gegenüber der zuweilen mangelnden Klarheit der Darstellung erheblich zur Veranschaulichung des Stoffes bei.

R. Hermann.

L. Prandtl und A. Betz, Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen (angegliedert dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung). IV. Lieferung. 8°. 148 S. Mit 234 Abbildungen. München und Berlin 1932. R. Oldenbourg. RM 10.—, geb. RM 11.80.

Nach fünfjähriger Pause erscheint hier wieder ein Sammelheft von Göttinger aerodynamischen Arbeiten, das von der Fachwelt dankbar begrüßt werden wird. Von den Beschreibungen neuer Versuchsanlagen interessiert vor allem das Luftschraubenlaboratorium. Um ohne allzu hohe Antriebsleistungen für die Schrauben mit den Flügelspitzen in den Bereich der Schallgeschwindigkeit zu kommen, ist der Windkanal zum Evakuieren eingerichtet. Neben spezifisch flugtechnischen Arbeiten interessieren den Physiker Messungen an ebenen und gewölbten Platten, an Kugeln in der Umgebung der kritischen Reynoldsschen Zahl, an rotierenden Zylindern. Besonders wertvoll aber wird für den Physiker das vorliegende Heft dadurch, daß Prandtl seine neueren theoretischen Untersuchungen über die turbulente Strömung in Rohren und längs Platten hier im Zusammenhang wiedergibt und ihre inneren Beziehungen zu Kármáns neueren ähnlichen Untersuchungen darlegt. Meßtechnisch ist noch ein neues Mikromanometer von Betz hervorzuheben, das — mit einer Mikroprojektionseinrichtung versehen — objektiv auf einer Mattscheibe $^1/_{100}$ mm W.-S. zu schätzen gestattet. Da das Instrument ein verhältnismäßig großes Luftvolumen benötigt, ist sein hauptsächlicher Verwendungszweck die Kontrolle der Windgeschwindigkeit in Windkanälen auf größere Entfernung.

Das ganze Werk gibt wieder ein anschauliches Bild über die reiche vorbildliche Tätigkeit unseres Kaiser-Wilhelm-Instituts.

L. Schiller.

R. Rothe, Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure. Teil IV: Übungsaufgaben mit Lösungen; Formelsammlung. Unter Mitwirkung von Oskar Degosang. 2. Heft (Bd. 34 von Teubners mathematischen Leitfäden). 8°. S. 53—104. Mit 46 Abbildungen. Leipzig und Berlin 1933. B. G. Teubner. Kart. RM 2.—.

Fortsetzung des hier bereits angezeigten Aufgabenheftes, und zwar handelt es sich um vorzüglich ausgewählte Aufgaben über Funktionen von zwei und mehr Veränderlichen; Differentialgeometrie ebener Kurven; komplexe Zahlen; Veränderliche und Funktionen.

Haupt.

NACHRICHTEN.

Im Jahre 1934 wird die Englische Physikalische Gesellschaft einen Kongreß über Atomphysik veranstalten. Die Tagung wird die erste ihrer Art in England sein und soll von Lord Rutherford eröffnet werden. Sie wird mindestens zwei Tage dauern und teils in London, teils in Cambridge stattfinden. Zeitpunkt wird noch mitgeteilt.

Ernannt: Professor Felice de Carli zum ord. Professor für allgemeine und anorganische Chemie an der Universität Perugia, der Privatdozent für Geophysik an der Universität Berlin und a. o. Professor an der Forstlichen Hochschule Eberswalde Dr. Julius Bartels zum ord. Professor für Meteorologie an der letzteren Hochschule.

In den Ruhestand: Der ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Darmstadt Geh. Hofrat Dr. Jakob Horn.

Gestorben: Der ord. Professor der Chemie an der Universität Boston Dr. Lyman Ch. Newell, das frühere Mitglied des Reichspatentamts Geh. Regierungsrat Dr. Fritz Regelsberger in Nürnberg, der frühere ord. Professor der Astronomie an der Universität Leipzig Dr. Julius Bauschinger.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. P. Debye in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck: Bibliographisches Institut AG., Leipzig.